Частное образовательное учреждение высшего образования

«ИНСТИТУТ БИЗНЕСА И ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

УТВРЖДАЮ
Ректор Института бизнеса и инновационных технологий

А.И. Садыкова

«29» июля 2023 г.

Одобрено
решением Ученого совета
от «29» июля 2023г.
протокол № 2

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Математика

Специальность: **38.05.01 Экономическая безопасность**

Специализация: **Экономическая безопасность хозяйствующих субъектов**

Квалификация: **Экономист**

Вологда
2023

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по специальности 38.05.01 Экономическая безопасность, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 14.04.2021 № 293, профессионального стандарта 08.043 ЭКОНОМИСТ ПРЕДПРИЯТИЯ, зарегистрированого в Министерстве юстиции РФ 2021.04.29 №63289.

Оглавление

1. Организационно-методический раздел. Аннотация

Цель изучения дисциплины - освоение необходимого математического аппарата, позволяющего анализировать, моделировать и решать прикладные задачи производственной, коммерческой и управленческой деятельности в сфере экономической безопасности, в том числе и с применением компьютера, пакетов прикладных программ, информационных технологий, адекватно интерпретировать результаты исследования математической модели.

Задачи освоения дисциплины:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математических формализованных задач;
- овладение формальными приемами оперирования в реальных математических исчислениях;
- овладение численными методами решения задач своей предметной области и их реализацией на компьютере.

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана. Изучение дисциплины базируется на знаниях и умениях, полученных при изучении дисциплины «Математика» на база полного общего образования.

Освоение дисциплины необходимо как предшествующее при изучении следующих дисциплин: Экономический анализ, Экономико-математические модели и методы, Региональная экономика, Основы научных исследований.

2. Перечень планируемых результатов обучения

Результаты освоения ООП: код и формулировка компетенции (в соответствии с учебным планом) или ее части	Код и формулировка индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 Способен использовать знания и методы экономической науки, применять статистико-математический инструментарий, строить экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты	ОПК-1.2 Выбирает и применяет статистико-математический инструментарий, строит экономико-математические модели необходимые для решения профессиональных задач	**Знает:** -статистико-математический инструментарий. **Умеет:** -применять статистико-математический инструментарий.
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.3 Критически анализирует и обобщает информацию для решения поставленных задач, применяя теоретические и эмпирические, количественные и качественные методы, системный подход	**Знает:** -методы системного подхода.. **Умеет:** -применять методы системного подхода..

3. Примерный тематический план дисциплины

Очная форма обучения - 1,2,3 семестр

Вид занятия	Часов по учебному плану
Контактная работа с преподавателем:	149
-занятия лекционного типа, в том числе:	66
практическая подготовка	0
-занятия семинарского типа:	
-семинарские/практические, в том числе:	60
практическая подготовка	0
-лабораторные, в том числе:	14
практическая подготовка	0
-консультации, в том числе по курсовой работе (проекту)	9
Самостоятельная работа:	139
в т.ч. курсовая работа (проект)	
Промежуточная аттестация:	
экзамен	108
Общая трудоемкость	396

Заочная форма обучения - 1,2 курс

Вид занятия	Часов по учебному плану
Контактная работа с преподавателем:	54
-занятия лекционного типа, в том числе:	14
практическая подготовка	0
-занятия семинарского типа:	
-семинарские/практические, в том числе:	20
практическая подготовка	0
-лабораторные, в том числе:	4
практическая подготовка	0
-консультации, в том числе по курсовой работе (проекту)	16
Самостоятельная работа:	324

в т.ч. курсовая работа (проект)	
контрольная работа	+
Промежуточная аттестация:	
экзамен	18
Общая трудоемкость	396

Очная форма обучения

№	Раздел / Тема дисциплины	Количество часов по видам учебной работы					
		ВСЕГО	СР	контактная работа с преподавателем			
				занятия лекционного типа	занятия семинарского типа:		консультации, в том числе по курсовой работе (проекту)
					семи-нарские/ практи-ческие	лабора-торные	
1	Математичекий анализ	69	25	22	22	0	
2	Линейная алгебра	105	61	22	16	6	
3	Теория вероятностей и математическая статистика	105	53	22	22	8	
Подготовка и защита курсовой работы (проекта)							
Промежуточная аттестация (экзамен)		108	105				3
ИТОГО		**396**	**244**	**66**	**60**	**14**	**12**
В том числе: практическая подготовка		0		0	0	0	

Заочная форма обучения

		Количество часов по видам учебной работы					
				контактная работа с преподавателем			
					занятия семинарского типа:		

№	Раздел / Тема дисциплины	ВСЕГО	СР	занятия лекционного типа	семи-нарские/ практи-ческие	лабора-торные	консультации, в том числе по курсовой работе (проекту)
1	Математичекий анализ	156	140	6	8	2	
2	Линейная алгебра	54	44	4	4	2	
3	Теория вероятностей и математическая статистика	152	140	4	8	0	
Подготовка и защита курсовой работы (проекта) / подготовка контрольной работы							
Промежуточная аттестация (экзамен)		18	16				2
ИТОГО		**396**	**340**	**14**	**20**	**4**	**18**
В том числе: практическая подготовка		0		0	0	0	

4. Содержание учебной дисциплины

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости

Системы координат. Виды уравнений прямой линии. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми. Нормаль к прямой.

Канонический вид кривых второго порядка, эллипс, гипербола, парабола. Приведение к каноническому виду.

Тема 2. Функция и предел функции

Понятие функции, основные характеристики функции. Обратная функция. Способы задания функции.

Числовая последовательность. Ограниченная, неограниченная, монотонная последовательность. Предел последовательности.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства последовательностей.

Предел функции, односторонние пределы функций. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные свойства пределов функции, связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями. Теорема о промежуточной функции. Первый и второй замечательные пределы. Основные типы неопределённостей и способы их раскрытия.

Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблица основных эквивалентностей.

Тема 3. Дифференциальное исчисление и его приложения

Непрерывность функции, точки разрыва и их классификация. Теоремы о непрерывных функциях. Приращение функции и аргумента. Производная функции, её геометрический, экономический и механический смысл. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Производная суммы, разности, произведения и частного двух функций. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции, производная обратной функции. Производная функций заданных неявно, в параметрическом виде.

Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Дифференциал функции, геометрический смысл дифференциала функции. Применение дифференциала функции к приближённым вычислениям. Теорема Ролля, Коши, Лагранжа. Формула Тейлора и ее приложения. Правило Лопиталя.

Признаки монотонности функции. Понятие экстремума, необходимое условия экстремума, достаточное условие экстремума. Точки перегиба, признаки выпуклости, вогнутости функции. Асимптоты графика функции, их нахождение. Общая схема полного исследования функции.

Тема 4. Интегральное исчисление и его приложения

Первообразная функции. Неопределённый интеграл, свойство неопределённого интеграла. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, интегрирование подстановкой, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных, иррациональных и тригонометрических функций.

Определённый интеграл, его геометрический смысл. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы, их сходимость. Вычисление площадей плоских фигур. Приближённое вычисление интегралов.

Тема 5. Дифференциальные уравнения

Определение комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме. Решение квадратных уравнений в комплексной области.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, их общее и частные решения. Задачи Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Линейные уравнения первого порядка. Подстановка Бернулли. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее и частное решения. Экономические и физические интерпретации дифференциальных уравнений.

Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве

Векторы и операции над векторами. Векторы в координатной форме. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку с известным вектором нормали. Уравнение плоскости проходящей через заданные три точки. Уравнение прямой в пространстве: каноническое и параметрическое задание. Уравнение прямой проходящей через две точки. Прямые и плоскости в пространстве.

Тема 7. Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Область определения функции нескольких переменных. Способы изображения функции нескольких переменных. Передел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных.

Дифференциал функции нескольких переменных. Применение дифференциала к приближённым вычислениям. Градиент, производная по направлению.

Производные второго и высших порядков.

Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.

Раздел 2. Линейная алгебра

Тема 8. Матрицы

Векторное пространство R^n. Матрицы, действия над ними. Определители, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Обратная матрица. Ранг матрицы. Собственные значения и собственные векторы матриц.

Тема 9
Система линейных алгебраических уравнений

Методы решения СЛАУ. Правило Крамера. Матричный способ. Метод исключения Жордана-Гаусса. Совместность СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли. Основные и свободные переменные. Базисные решения СЛАУ. Преобразование базисов. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение СЛАУ.

Тема 10. Задачи линейного программирования

Экономические задачи, решаемые методами линейного программирования (ЛП). Математическая постановка задачи ЛП. Выпуклые множества и их свойства. Выпуклые многогранники в R^n. Существование решения задачи ЛП. Теорема Неймана. Канонический вид задачи ЛП. Графический метод решения задачи ЛП. Симплекс-метод решения задачи ЛП, его сущность. Целочисленное линейное программирование.

Тема 11. Транспортная задача линейного программирования

Постановка транспортной задачи. Составление первого опорного плана. Критерий оптимальности в методе потенциалов. Перераспределение плана поставок.

Тема 12. Оптимизационные задачи

Классификация задач математического программирования. Задачи выпуклого, целочисленного, бинарного программирования. Нелинейное программирование. Динамическое программирование.

Раздел 3. Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 13. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Испытание, события, виды событий. Случайные события. Частота и вероятность. Операции над событиями. Полная группа элементарных событий. Классическое и статистическое определения вероятности. Основные формулы комбинаторики. Правило суммы, правило произведения. Зависимые и независимые события, условная вероятность.

Основные формулы для вычисления вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Тема 14. Повторные независимые испытания

Формула Бернулли. Локальная и интегральная формулы Лапласа. Наивероятнейшее число наступлений событий.

Тема 15. Дискретная случайная величина

Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Операции со случайными величинами. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Основные числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, их смысл, свойства и вычисление.

Тема 16. Непрерывные случайные величины

Дифференциальная и интегральная функции распределения непрерывной случайной величины, их свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение. Математическое ожидание и дисперсия. Вероятности, связанные с равномерным распределением.

Нормальный закон распределения. Особенности нормального закона распределения непрерывной случайной величины, его основные характеристики. Кривая Гаусса. Свойства дифференциальной и интегральной функций Лапласа. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток.

Показательное распределение (Пуассона).

Тема 17. Обработка выборочных данных

Генеральная совокупность и выборка. Выборочный метод. Статистическое распределение выборки, его графическое изображение в виде полигона и гистограммы. Основные характеристики выборочного распределения: средняя, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Тема 18. Проверка статистических гипотез

Статистические гипотезы. Выбор вида гипотезы. Критерий согласия Пирсона. Оценка параметров. Вычисление теоретических частот для нормального распределения случайной величины, их сравнение с эмпирическими частотами по критерию Пирсона.

Тема 19. Теория корреляции

Виды зависимостей между случайными величинами. Задачи теории корреляции. Корреляционная таблица. Уравнение регрессии. Метод наименьших квадратов для нахождения параметров уравнения линейной регрессии. Оценка тесноты линейной связи по коэффициенту линейной корреляции. Корреляционное отношение. Оценка параметров распределения. Доверительный интервал. Классическая формула.

5. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная учебная литература

Высшая математика : учебник / В.С. Шипачев. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 479 с. — (Высшее образование). — www.dx.doi.org/10.12737/5394. - Режим доступа: "http://znanium.com/go.php?id=990716"

Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., - 3-е изд. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2015. - 479 с.: 60x90 1/16. - (Золотой фонд российских учебников) (Переплёт) ISBN 978-5-238-00991-9. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=872573

Задачник по высшей математике : учеб. пособие / В.С. Шипачев. — 10-е изд., стереотип. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 304 с. — (Высшее образование). - Режим доступа: "http://znanium.com/go.php?id=986760"

Дополнительная учебная литература

Высшая математика. Практикум : учеб. пособие / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. — М. : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2018. — 160 с. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=935333

Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-методическое пособие / Джабраилов А.Ш. - Волгоград:Волгоградский государственный аграрный университет, 2017. - 72 с.: ISBN - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/1007877

6. Учебно-методическое, информационное и материально-техническое обеспечение дисциплины

При изучении дисциплины используется следующее учебно-методическое, информационное и материально-техническое обеспечение.

Программное обеспечение:

– тестирующие программные оболочки и контрольно-обучающие программы: ACT-test; Nova-test;

– программы, обеспечивающие доступ в сеть Интернет («Enternet explorer», «Google chrome»);

– программы, демонстрации видео материалов (проигрыватель «Windows Media Player», «Power Point»).

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

– Агрегатор научных журналов Directory of Open Access Journals: https://www.doaj.org

– Агрегатор дипломных работ и диссертаций Open Access Theses and Dissertations: https://oatd.org

– Поисковая система научных публикаций Google Scholar: https://scholar.google.ru

– Университетская информационная система РОССИЯ: https://uisrussia.msu.ru/dp.php

– Научная электронная библиотека КиберЛенинка: https://cyberleninka.ru

– Научная электронная библиотека: http://elibrary.ru

– Справочно-правовая система: «Гарант»: https://www.garant.ru

– Справочно-правовая система «Консультант Плюс»: http://www.consultant.ru

– Электронно-библиотечная система Znanium.com : www.znanium.com

– База данных Ruslana. – Режим доступа: http://ruslana.bvdep.com/

– http://nigma.ru – интеллектуальная поисковая система (по темам объединяет результаты, полученные из разных поисковых систем).

Материально-техническое обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- учебные аудитории, оснащенные мультимедийной техникой, позволяющей организовать отработку практических навыков обучающимися, выявить уровень сформированности компетенций методом тестирования и в других интерактивных формах;

- дидактические материалы – презентационные материалы (слайды); бланки анкет и опросов; учебные видеозаписи; комплекты схем, плакатов, стенды;

- технические средства обучения – аудио-, видео-, фотоаппаратура, иные демонстрационные средства; персональный компьютер, множительная техника (МФУ).

Для проведения текущего (рубежного) контроля и промежуточной аттестации (зачета с оценкой) методом компьютерного тестирования используются прошедшие банки тестовых заданий и лицензионная тестирующая программная оболочка типа «АСТ-test», «Nova-test» и(или) другие.

ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ, В ТОМ ЧИСЛЕ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

№ п/п	Комплект лицензионного программного обеспечения		Комплект свободно распространяемого программного обеспечения	
	лицензионное программное обеспечение	лицензионное программное обеспечение отечественного производства	свободно распространяемое программное обеспечение	свободно распространяемое программное обеспечение отечественного производства
1	Microsoft Excel	Антивирус Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный	Adobe Acrobat Reader DC	Яндекс.Браузер
2	Microsoft Office 365	Электронный периодический справочник "Система Гарант"	Архиватор 7z	Яндекс.Диск
3	Microsoft Word	Электронный периодический справочник "Система Консультант Плюс"		

7. Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня. Самостоятельная работа проводится с целью:

– систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;

– углубления и расширения теоретических знаний;

– формирования умений использовать специальную литературу;

– развития познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, ответственности и организованности;

– формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине проводится на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию (перечень заданий приведен ниже). Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия для обучающихся очной и заочной форм обучения.

Основными видами аудиторной самостоятельной работы являются:

– обсуждение теоретических вопросов и решение практических задач по темам дисциплины;

– работа с литературой и другими источниками информации, в том числе электронными.

Для обучающихся по заочной форме обучения результатом внеаудиторной самостоятельной работы является предоставление контрольной работы.

Методические указания для выполнения контрольной работы

При выполнении контрольной работы по математике нужно придерживаться следующих правил.

1. Выполнять контрольную работу в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради разборчиво написать фамилию, инициалы, учебный шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы указать использованную литературу, дату выполнения и расписаться.

3. Работа обязательно должна содержать все задачи именно вашего варианта.

4. Решения задач нужно располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.

6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. Контрольная работа должна быть выполнена в межсессионный период и представлена на проверку в методкабинет.

8. После получения проверенной работы следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

9. Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

10. По итогам выполнения контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено». Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период во время субботних консультаций или во время сессии.

Правило выбора задач контрольной работы

Номера задач контрольных работ № 1 (1-го курса) определяются с помощью приведенной ниже таблицы 1 по двум последним цифрам номера личного дела (шифра) студента.

В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся *последней* в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы 1 (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо выбрать цифру, являющуюся *предпоследней* в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий вы найдете номера задач своей контрольной работы. Например, если шифр ЭБЗ-10-102-Д то номера задач выбираем по последней цифре шифра 2 и предпоследней цифре 0. Контрольная работа № 1 должна включать задачи 2, 13, 29, 34, 49, 56 64.

Будьте внимательны при выборе варианта задания. Если какая-нибудь задача не соответствует варианту задания, то контрольная работа возвращается на доработку.

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1 (для 1-го курса)

Таблица 1

Последняя цифра шифра											
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***0***	4	3	2	1	8	9	10	6	5	7
		14	15	13	12	17	16	11	20	19	18
		26	28	29	30	21	22	23	24	25	27
		32	31	34	35	36	37	38	33	39	40
		47	48	49	50	42	43	44	45	46	41
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
	1	5	4	3	2	1	10	7	9	8	6
		15	14	13	12	11	16	20	19	18	17
		25	27	28	30	29	21	22	23	24	26
		40	32	33	34	35	36	37	31	38	39
		48	47	50	49	44	45	46	41	43	42
		51	55	60	52	59	57	53	58	56	54
	2	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
		16	15	14	13	12	20	18	19	17	11

		24	26	27	28	29	30	21	22	23	25
		36	37	40	31	32	33	34	35	39	38
		49	50	41	42	43	44	45	46	47	48
		54	60	57	55	53	58	52	59	56	51

Продолжение табл. 1

		Последняя цифра шифра									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***3***	7	6	9	10	3	2	1	8	5	4
		17	18	19	16	20	11	12	14	13	15
		23	24	25	26	27	28	29	30	22	21
		37	38	31	32	33	34	35	36	40	39
		49	50	48	47	41	42	43	44	45	46
		54	55	58	56	60	52	59	53	51	57
	4	8	7	10	5	4	6	2	1	9	3
		18	19	17	20	12	14	13	15	11	16
		22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
		38	31	32	33	34	35	36	37	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	43	44
		58	56	57	60	52	59	53	55	51	54
	5	3	2	1	4	5	7	9	10	6	8
		13	17	15	16	14	12	18	11	20	19
		27	29	30	21	22	24	25	26	28	23
		31	33	32	34	35	36	39	37	40	38
		46	45	47	48	50	49	41	42	43	44
		51	56	57	54	55	53	60	52	58	59
	6	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		30	21	28	29	27	26	24	25	23	2
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		44	41	46	45	49	47	50	48	43	42
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59

Окончание табл. 1

	Последняя цифра шифра										
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***7***	4	2	8	10	1	9	6	7	3	5
		14	13	20	12	15	11	16	17	19	18
		25	22	24	21	27	26	28	30	23	29
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		41	44	47	45	49	42	50	48	43	46
		55	59	56	54	51	52	53	60	57	58
	8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
		43	44	45	46	47	48	49	50	41	42
		54	56	55	60	57	53	51	58	59	52
	9	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		28	30	22	23	24	25	26	27	29	21
		40	38	39	36	31	37	32	33	34	35
		45	46	42	41	43	44	50	47	48	49
		51	54	58	53	55	59	52	57	56	60

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2 (для 2-го курса)

		Последняя цифра в шифре									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра в шифре	***0, или 3, или 6***	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		30	21	28	29	27	26	24	25	23	22
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		44	41	46	45	49	47	50	48	43	42
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		67	68	69	62	61	65	64	63	70	66
		78	72	73	80	75	76	77	78	79	74
	1, или 4, или 7	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
		43	44	45	46	47	48	49	50	41	42
		54	56	55	60	57	53	51	58	59	52
		68	66	61	63	62	64	70	65	67	69
		74	71	79	77	73	72	76	80	75	78
	2, или 5, или 8, или 9	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		28	30	22	23	24	25	26	27	29	21
		40	38	39	36	31	37	32	33	34	35
		45	46	42	41	43	44	50	47	48	49
		51	54	58	53	55	59	52	57	56	60
		66	67	63	68	69	70	65	61	62	64
		76	80	75	78	74	71	79	77	73	72

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ СЕМИНАРСКОГО ТИПА КОНТРОЛЬНОЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Аналитическая геометрия. Прямая на плоскости

Задачи 1–10

Даны точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$. Сделать чертеж и найти:

1. длину отрезка AB;
2. уравнение прямой, проходящей через точки A и B;
3. уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно прямой AB;
4. уравнение прямой, проходящей через вершину C перпендикулярно прямой AB;
5. расстояние от точки C до прямой AB.

1.	A (– 2; 2),	B (1; 6),	C (1; 1);
2.	A (1;–1),	B (– 2; 3),	C (–3; 1);
3.	A (2;– 4),	B (5; 0),	C (–1; 2);
4.	A (2; 0),	B (–1; 4),	C (3; 2);
5.	A (5;–1),	B (2; 3),	C (–3;– 2);
6.	A (4; 1),	B (1;–3),	C (– 4; 2);
7.	A (–1; 0),	B (2; 4),	C (3; 2);
8.	A (2; – 2),	B (–1; 2),	C (4; 2);
9.	A (3; 3),	B (0;–1),	C (4; 1);
10.	A (1; 0),	B (4; 4),	C (–1; 4).

Методические указания к решению задач 1 – 10

Приведём основные формулы аналитической геометрии на плоскости.

1.Формула *расстояния между двумя точками* $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

2. *Уравнения прямой на плоскости*

Прямую линию на плоскости можно задавать различными способами, приведем некоторые их них.

- Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$, $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$.

- Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$y = kx+b.$$

Если известны координаты двух различных точек $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$ на прямой, то угловой коэффициент можно вычислить по формуле

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k и проходящей через точку $(x_0;y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Если в этом уравнении менять k, то получим семейство прямых, проходящих через точку $(x_0;y_0)$, которое называют «пучком прямых».

- Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Если $x_B = x_A$, то прямая параллельна оси Oy, её уравнение: $x = x_A$.

Если $y_B = y_A$, то прямая параллельна оси Ox, её уравнение: $y = y_A$.

3. *Взаимное расположение прямых.*

Пусть k_1 и k_2 – угловые коэффициенты двух прямых.

- Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.
- Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

4. *Положение точки относительно прямой.*

Формула нахождения расстояния от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Точка $M(x_0;y_0)$ лежит на прямой $Ax + By + C = 0$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, то есть справедливо равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Очевидно, что в этом случае $\boldsymbol{d} = 0$.

Задача. Рассмотрим решение задачи, аналогичной задачам 1-10, если даны точки *A(2;1), B(–4;4), C(–1,5).*

Решение. Начнем решение задачи с выполнения чертежа (рис. 1). Построим точки *A(2;1), B(–4;4), C(–1;5)* в прямоугольной системе координат О*xy*. Проведем прямую *AB,* уравнение которой необходимо найти, а затем через точку *C* проведем прямую *CK* параллельно *AB* и прямую *CD* перпендикулярно *AB*.

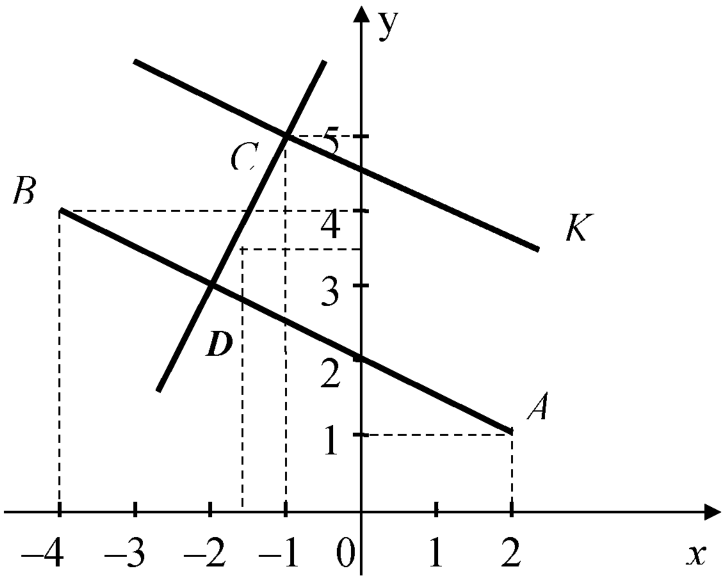


Рис. 1

1. Длину отрезка *AB* находим как расстояние между двумя точками *A(2;1)* и *B(–4;4)*:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (4-1)^2} =$$
$$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7.$$

2. Уравнение прямой *AB* найдем по формуле уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

в нашем случае:

$$\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{-4-2}}=\frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{4-1}}, \text{ то есть } \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{-6}}=\frac{\boldsymbol{y-1}}{\boldsymbol{3}}.$$

Запишем пропорцию: 3×(x – 2) = – 6×(y – 1), раскроем скобки и перенесём все слагаемые в левую часть уравнения, получим окончательный ответ $3x + 6y - 12 = 0$ − уравнение прямой AB.

3. Найдем угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-1}{-4-2}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2},$$

по условию перпендикулярности прямых CD и AB: $k_{CD}\cdot k_{AB}=-1.$

Тогда $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-1/2}=2.$ Уравнение прямой CD запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку C:

$$y-y_C=k(x-x_C).$$

Подставив в уравнение координаты точки C(– 1, 5) и значение $k=k_{CD}=2,$ получим $y-5=2(x+1);$

$$y-5=2x+2;$$

$2x-y+7=0$ – уравнение прямой CD.

4. По условию параллельности прямых CE и AB: $\boldsymbol{k_{CE}=k_{AB}=-\frac{1}{2}}$.

Уравнение прямой CE запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку C: $y-y_C=k(x-x_C)$.

Подставив в уравнение координаты точки C(– 1, 5) и значение $\boldsymbol{k=k_{CE}=-\frac{1}{2}}$, получим $y-5=-\frac{1}{2}(x+1);$

$$y-5=-0{,}5x-0{,}5;$$

$0{,}5x+y-4{,}5=0$ – уравнение прямой CE.

5. Расстояние от точки C до прямой AB найдём по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Уравнение прямой AB найдено ранее (см. пункт 2): $3x + 6y - 12 = 0$.

Тогда $d=\frac{|3x_C+6y_C-12|}{\sqrt{3^2+6^2}}=\frac{|3\cdot(-1)+6\cdot 5-12|}{\sqrt{45}}=\frac{15}{3\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\approx 2{,}24$.

Ответы. 1) $|AB|=5\sqrt{3}\approx 6{,}7;$

2) $3x + 6y - 12 = 0$ − уравнение прямой AB;

3) $2x-y+7=0$ – уравнение прямой CD;
4) $0,5x+y-4,5=0$ – уравнение прямой CE;
5) $d=\sqrt{5}\approx 2,24$.

Предел функции

Задачи 11–20

Вычислить пределы функций.

11. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; $x_0=1;\ 2;\ -1;\ 3;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x^2}{x\sin x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+3}{3n-2}\right)^{2n+4}$.

12. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1}$; $x_0=-2;\ 0,5;\ -1;\ 3;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\ln(1+4x)}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-4}{4n-2}\right)^{3n+3}$.

13. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-2x-3}$; $x_0=1;\ -1,5;\ -1;\ 3;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2}{2x^2}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-5}\right)^{2n-1}$.

14. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-2x}$; $x_0=5;\ 2;\ -\dfrac{1}{3};\ 0;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^3}{\operatorname{tg}5x^3}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+2}\right)^{3n-5}$.

15. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-9x-5}$; $x_0=5;\ 2;\ -1;\ -0,5;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{4x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n-5}\right)^{9n-6}$.

16. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-x}{4x^2+3x-1}$; $x_0=1;\ 0;\ -1;\ \dfrac{1}{4};\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

17. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-5}$; $x_0=1;\ -5;\ -\dfrac{5}{2};\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-7}{3n+5}\right)^{-3n}$.

18. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-12x+4}{x^2+x-6}$; $x_0=-3;\ 2;\ -1;\ \dfrac{2}{5};\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{4n-2}\right)^{-n+5}$.

19. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-13x+12}$; $x_0=-1;\ \dfrac{4}{3};\ 1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{2x}-1}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n-1}\right)^{-n+4}$.

20. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2+x-28}$; $x_0=-4;\ 2;\ \dfrac{7}{2};\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\arcsin 4x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{-n+3}$.

Методические указания к решению задач 11 – 20

Пределы функций, основные теоремы о пределах

Пределом функции $f(x)$ называется число A, к которому неограниченно приближаются значения функции при указанном стремлении аргумента x.

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B;$

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B;$

- $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cA,$ где c – число;

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B},$ если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Замечательные пределы,
эквивалентные бесконечно малые функции

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,$

или, в другой форме, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$

где $e=2{,}718...$ – иррациональное число.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Если значения функции *f(x)* неограниченно возрастают по абсолютной величине при $x \to x_0$, то такую функцию называют *бесконечно большой при* $x \to x_0$. Предел этой функции обозначают знаком бесконечности ∞: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \ (\pm\infty)$.

Теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

$$\text{Если } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \text{ то } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

$$\text{Если } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Утверждения всех вышеприведённых теорем также справедливы, если $x \to \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).

Эквивалентные бесконечно малые функции. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Наиболее часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых функций при $\alpha(x) \to 0$:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$
$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x); \qquad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).$$

Задача. Вычислить пределы функции

$$\lim_{x \to x_0} \frac{3x^2 + 10x - 8}{4x^2 + 15x - 4}; \quad x_0 = 1; \ -4; \ \frac{1}{4}; \ \frac{2}{3}; \ \infty.$$

Решение. В задаче следует найти предел частного. С этой целью необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя дроби, подставив в них предельное значение аргумента x.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 10x - 8}{4x^2 + 15x - 4} = \dfrac{3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 8}{4 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 4} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$.

При подстановке $x=-4$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их значения равны нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ *при* $x\to x_0$ *может быть раскрыта сокращением дроби на множитель вида* $(x-x_0)$, *который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль,* в данном случае на $(x+4)$. Поэтому следует разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

$3x^2+10x-8=0;$

$D=10^2-4\cdot 3\cdot(-8)=196;$

$x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\dfrac{-10\pm 14}{6};$

$x_1=-4;\quad x_2=\dfrac{2}{3}.$

$3x^2+10x-8=3(x+4)(x-2/3)=$

$=(x+4)(3x-2).$

$4x^2+15x-4=0;$

$D=15^2-4\cdot 4\cdot(-4)=289;$

$x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{289}}{2\cdot 4}=\dfrac{-15\pm 17}{8};$

$x_1=-4;\quad x_2=\dfrac{1}{4}.$

$4x^2+15x-4=4(x+4)(x-1/4)=$

$=(x+4)(4x-1).$

Таким образом,

$$\lim_{x\to -4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^4+15x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(3x-2)}{(x+4)(4x-1)}=\lim_{x\to -4}\frac{3x-2}{4x-1}=\frac{-14}{-17}=\frac{14}{17}.$$

3. $$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+10\cdot\frac{2}{3}-8}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\cdot\frac{2}{3}-4}=\frac{0}{70/9}=0.$$

Здесь применима теорема о пределе частного, так как предел знаменателя существует и не равен нулю.

4. $$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\frac{1}{16}+10\cdot\frac{1}{4}-8}{4\cdot\frac{1}{16}+15\cdot\frac{1}{4}-4}=\left(\frac{-85/16}{0}\right)=\infty.$$

Здесь использована теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$.

Пределы числителя и знаменателя дроби равны ∞. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность». Теорема о пределе частного здесь не применима.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *при* $x\to\infty$, *каждый член числителя и знаменателя дроби делят на x в наивысшей степени (в нашем примере на* x^2*), при этом величина дроби не изменится, но исчезнет неопределенность.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{10x}{x^2}-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{15x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{10}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{4+\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$

(по теореме о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Ответ. 1. $\frac{1}{3}$; 2. $\frac{14}{17}$; 3. 0; 4. ∞; 5. $\frac{3}{4}$.

Задача. Вычислить пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}=\left(\dfrac{\operatorname{tg}0}{\ln 1}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}3x\sim 3x;\\ \ln(1+5x)\sim 5x\\ \text{при } x\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}=\left(\dfrac{\arcsin 0}{0}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\arcsin 6x\sim 6x\\ \text{при } x\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2x}=3.$

В рассматриваемых задачах неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ была раскрыта после замены бесконечно малых функций на эквивалентные им и сокращения полученных дробей на x.

Ответ. *а*) $\frac{3}{5}$; *б*) 3.

Задача. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}$.

Решение. Очевидно, что

$$\frac{3n-2}{3n+5}=\frac{3n+5-5-2}{3n+5}=\frac{(3n+5)-7}{3n+5}=1-\frac{7}{3n+5}=1+\frac{-7}{3n+5}.$$

Далее воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{\frac{3n+5}{-7}}\right]^{\frac{-7}{3n+5}\cdot(4n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-7\cdot(4n+1)}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28n-7}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28-\frac{7}{n}}{3+\frac{5}{n}}}=e^{-\frac{28}{3}}.$$

Ответ. $e^{-\frac{28}{3}}$.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задачи 21–30

Найти производные данных функций и их дифференциалы.

21. *а)* $y=3x^4-\frac{5}{\sqrt[4]{x}}+2$; *б)* $y=\frac{2x^2}{1-3x}$;

в) $y=2\cos x\cdot\ln x+\sqrt{1-4x^2}$.

22. *а)* $y = 5x^2 + 4\sqrt[3]{x^5} + 3$; *б)* $y = \dfrac{x^3 - 2x}{3x}$;

в) $y = \operatorname{arctg} x^4 - x \cdot \ln x$.

23. *а)* $y = \dfrac{1}{4}x^8 + 8\sqrt[8]{x^3} - 1$; *б)* $y = \dfrac{4x^2 - 1}{1 - x^2}$;

в) $y = \cos(\ln x) + x^2 \cdot \operatorname{tg} x$.

24. *а)* $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x} - 4$; *б)* $y = \dfrac{x+3}{2x-5}$;

в) $y = \ln\sqrt{x-1} + x^3 \cdot \operatorname{arctg} x$.

25. *а)* $y = 3x^8 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3$; *б)* $y = \dfrac{3x^4}{x-3}$;

в) $y = \operatorname{tg} e^x + \sin x \cdot \ln x$.

26. *а)* $y = 5x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3$; *б)* $y = \dfrac{2x-1}{x^5}$;

в) $y = \ln(\sin x) - x^6 \cdot \operatorname{tg} x$.

27. *а)* $y = 4x^3 + \dfrac{3}{x \cdot \sqrt[3]{x}} - 2$; *б)* $y = \dfrac{1 - 6x^2}{1 + x}$;

в) $y = \sqrt{\sin x} - x \cdot \operatorname{ctg} x$.

28. *а)* $y = 7x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 6$; *б)* $y = \dfrac{2x+4}{1+x^2}$;

в) $y = \sqrt{\ln x} - (1 - 2x^2) \cdot \sin x$.

29. *а)* $y = 3x^4 - \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3$; *б)* $y = \dfrac{x^6 - 1}{2x + 1}$;

в) $y = \operatorname{tg} x^2 + \sin x \cdot e^x$.

30. *а)* $y = 8x^2 - \dfrac{9}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + 6$; *б)* $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

в) $y = \arcsin x^3 + \ln x \cdot \cos x$.

Методические указания к решению задач 21 – 30

Производная и дифференциал функции одной переменной

1. Понятие производной. Производной для функции y = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю и указанный предел существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Производная $f'(x_0)$ показывает скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0. Геометрически $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Нахождение производной для функции $f(x)$ называется её дифференцированием.

2. *Дифференциал функции.*

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной $dx = \Delta x$:

$$dy = f'(x)dx.$$

3. *Правила дифференцирования.* Пусть даны дифференцируемые функции u(x) и v(x), тогда справедливы формулы:

$$(u+v)' = u' + v';$$

$$(u-v)' = u' - v';$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Отметим также, что:

а) производная от независимой переменной равна единице: $x' = 1$;
б) производная постоянной величины *с* равна нулю: $c' = 0$;
в) постоянный множитель выносится за знак производной:
$$(cu)' = c \cdot u'.$$

4. *Производная сложной функции. Сложная функция (суперпозиция функций)* – это функция вида *y = f(u)*, где *u = u(x)* , то есть это функция от функции. Например,

- функция $y = \sin 2x$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = 2x$;
- функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = e^{u}$, где $u = \operatorname{tg} x$.

Производную сложной функции находят по правилу
$$\left[f(u(x))\right]' = f'_u \cdot u'_x .$$

5. *Таблица производных.*

Производные основных элементарных функций	**Производные сложных функций**
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
2. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$	2. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$
$(e^{x})' = e^{x}$	$(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

9. $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

10. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

Задача. Найти производные данных функций и их дифференциалы.

Решение. ***а***) $y = 4x^3 - \frac{6}{x^3 \cdot \sqrt{x}} + 3$.

Приведем функцию y к виду, удобному для дифференцирования, используя правила действия со степенями

$$y = 4x^3 - \frac{6}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3.$$

По правилу дифференцирования суммы и разности функций:

$$y' = \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3\right)' = \left(4x^3\right)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}}\right)' + 3' =$$

$$= 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 = 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

Тогда дифференциал функции y:

$$dy = f'(x)dx = \left(12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}\right) dx.$$

б) $y = \frac{1+9x}{x^3+3}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad \text{где} \quad u = 1 + 9x, \quad v = x^3 + 3.$$

$$y' = \left(\frac{1+9x}{x^3+3}\right)' = \frac{(1+9x)' \cdot (x^3+3) - (1+9x) \cdot \left(x^3+3\right)'}{(x^3+3)^2} =$$

$$= \frac{9 \cdot (x^3+3) - (1+9x) \cdot 3x^2}{(x^3+3)^2} = \frac{9x^3 + 27 - 3x^2 - 27x^3}{(x^3+3)^2} = \frac{27 - 3x^2 - 18x^3}{(x^3+3)^2}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \frac{27 - 3x^2 - 18x^3}{(x^3+3)^2}\, dx.$$

в) $y = \sqrt{\cos x} - \operatorname{tg} x \cdot \ln x$.

Функция $\sqrt{\cos x}$ - сложная. Ее можно представить в виде $y = \sqrt{u}$, где $u = \cos x$. Применим формулу $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$\left(\sqrt{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Производную функции $\operatorname{tg} x \cdot \ln x$ находим по правилу дифференцирования произведения:

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v', \text{ где } u = \operatorname{tg} x, \quad v = \ln x.$$

$$(\operatorname{tg} x \cdot \ln x)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$y' = \left(\sqrt{\cos x}\right)' - \left(\operatorname{tg} x \cdot \ln x\right)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) dx.$$

Неопределенный интеграл

Задачи 31– 40

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

31. *а)* $\int \frac{x^3 - 9x - 1}{\sqrt{x}} dx;$

б) $\int \cos\left(\frac{2x-5}{7}\right) dx;$

в) $\int x^2 \cdot \sqrt{4 - 5x^3}\ dx;$

г) $\int (2x-4)e^{-7x} dx.$

32. *а)* $\int \frac{x^4 + 2x + 10}{\sqrt[3]{x}} dx;$

б) $\int \sqrt{4 - 6x}\ dx;$

в) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$

г) $\int x^2 \ln(3x) dx.$

33. *а)* $\int \frac{2 + 3x^2 + x\sqrt{x}}{x} dx;$

б) $\int \cos(2x-1) dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

г) $\int (3x-2)\cos 7x dx.$

34. *а)* $\int \frac{x - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{x} dx;$

б) $\int e^{3-2x} dx;$

в) $\int \frac{x^2}{(3-2x^3)^2} dx;$

г) $\int (5-x)\sin 6x dx.$

35. *а)* $\int \frac{x^2 - x^3 \cdot \sqrt{x} + 1}{x^2} dx;$

б) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{5} dx;$

в) $\int x^3 e^{x^4+2} dx;$

г) $\int \frac{\ln 6x}{x^3} dx.$

36. *а)* $\int \frac{\sqrt[5]{x^2} - x^2 - 3}{x} dx;$

б) $\int \frac{1}{(3+2x)^5} dx;$

в) $\int \frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)} dx;$

г) $\int (3-2x)\sin 5x dx.$

37. *а)* $\int \frac{x^5 - x + 1}{\sqrt[3]{x}} dx;$

б) $\int (9x+5)^4 dx;$

38. *а)* $\int \frac{x^4 - 9\ \sqrt[3]{x} - 5}{x^2} dx;$

б) $\int \cos(2-3x) dx;$

в) $\int x\cos(x^2-1)dx;$

г) $\int (4x-1)\ e^{-3x}dx.$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

г) $\int (5x+2)\cos 5x dx.$

39. *а*) $\int \frac{x^6+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$

б) $\int e^{-0,5x+1}dx;$

в) $\int \frac{x^2-e^{3x}}{x^3-e^{3x}}dx;$

г) $\int x^4\ln(6x)dx.$

40. *а*) $\int \frac{x^2+3\sqrt[3]{x}+4}{x}dx;$

б) $\int \sin\left(\frac{1-3x}{4}\right)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx;$

г) $\int (2-x)\ e^{-5x}dx.$

Методические указания к решению задач 31 – 40

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – произвольное число, и называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

2. $\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx,$

где k – постоянная, отличная от нуля.

Таблица интегралов.

1. $\int dx = x+C;$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C;$

3. $\int x^{\alpha} \cdot dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1;$

4. $\int e^{x} dx = e^{x} + C;$ 5. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C;$ 6. $\int \sin x \quad dx = -\cos x + C;$ 7. $\int \cos x \quad dx = \sin x + C;$

8. $\int \dfrac{1}{\sin^{2} x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$ 9. $\int \dfrac{1}{\cos^{2} x} dx = \operatorname{tg} x + C;$

10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} dx = \arcsin x + C;$ 11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{1}{1+x^{2}} dx = \operatorname{arctg} x + C;$ 13. $\int \dfrac{1}{a^{2}+x^{2}} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{1}{x^{2}-a^{2}} dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C.$

15. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} dx = \ln \left| \ x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}} \right| + C;$

Примечание. Формулы верны, когда переменная x является независимой переменной, а также когда x является функцией другой переменной: $x = x(t)$.

Основные методы интегрирования

Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

1) *Непосредственное интегрирование.*

Интеграл приводится к табличному виду путем алгебраических или тригонометрических преобразований.

2) *Замена переменной (интегрирование подстановкой).* Сведение интеграла к табличному виду осуществляется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$. Тогда дифференциал dt равен

$$dt = \varphi'(x)dx.$$

Рекомендации по введению новой переменной даны ниже в примерах.

Обратите внимание! Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Если интеграл взят правильно, то производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Задача. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Решение. В контрольной работе интеграл, обозначенный буквой *a* берется методом непосредственного интегрирования. При этом используются табличные интегралы от степенных функций:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Используются также правила действий со степенями.

$$a)\ \int \frac{3\ \sqrt[3]{x}-2+6x^4}{\sqrt[3]{x^4}}dx = \int\left(\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{6x^4}{x^{\frac{4}{3}}}\right)dx =$$

$$= \int\left(3x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{4-\frac{4}{3}}\right)dx = \int\left(3x^{-1} - 2x^{-\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{8}{3}}\right)dx =$$

$$= \int\frac{3}{x}\ dx - \int 2x^{-\frac{4}{3}}dx + \int 6x^{\frac{8}{3}}dx = 3\int\frac{dx}{x} - 2\int x^{-\frac{4}{3}}dx + 6\int x^{\frac{8}{3}}dx =$$

$$=3\ln|x|-2\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+6\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1}+C=3\ln|x|-2\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}+6\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}+C=$$

$$=3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3\frac{2}{3}}+C=3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}+C.$$

Проверка.

$$\left(3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}+C\right)'=\left(3\ln|x|\right)'+\left(6x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(\frac{18}{11}x^{\frac{11}{3}}\right)'+C'=$$

$$=3\frac{1}{x}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}+\frac{18}{11}\cdot\frac{11}{3}x^{\frac{11}{3}-1}+0=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}+6x^{\frac{8}{3}}=$$

$$=\frac{3x^{\frac{1}{3}}-2+6x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{3\ \sqrt[3]{x}-2+6x^{4}}{\sqrt[3]{x^{4}}}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

Интеграл *б* в контрольной работе берется методом замены переменной (подстановкой). Приведем ряд примеров.

1*б*. $\int\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx.$

За новую переменную возьмем *аргумент подынтегральной функции* $t=\frac{1-2x}{3}$ и найдем dt по формуле:

$$dt=t'(x)dx=\left(\frac{1-2x}{3}\right)'dx=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x\right)'dx=\left(0-\frac{2}{3}\cdot 1\right)dx=-\frac{2}{3}dx.$$

Тогда

$$\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx = \left| \begin{aligned} & t = \frac{1-2x}{3} \\ & dt = -\frac{2}{3}dx \\ & dx = -\frac{3}{2}dt \end{aligned} \right| = \int \sin t \cdot \left(-\frac{3}{2}dt\right) = -\frac{3}{2}\int \sin t \cdot dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(-\cos t\right) + C = \frac{3}{2}\cos t + C = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C.$$

В последнем действии осуществлен переход к исходной переменной x с учетом, что $t = \dfrac{1-2x}{3}$.

Проверка.

$$\left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C\right)' = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)\right)' + C' =$$

$$= -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) \cdot \left(\frac{1-2x}{3}\right)' + 0 = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right).$$

Что и требовалось показать.

2 *б.* $\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx$.

За новую переменную возьмем *показатель степени* $t = 1 - \frac{1}{3}x$.

Тогда

$$\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx = \left| \begin{aligned} & t = 1 - \frac{1}{3}x \\ & dt = -\frac{1}{3}dx \\ & dx = -3dt \end{aligned} \right| = \int e^t\left(-3dt\right) = -3\int e^t dt = -3e^t + C = -3e^{1-\frac{1}{3}x} + C.$$

Проверка.

$$\left(-3e^{1-\frac{1}{3}x} + C\right)' = -3\left(e^{1-\frac{1}{3}x}\right)' + C' = -3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(1 - \frac{1}{3}x\right)' + 0 =$$

$$= -3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{1-\frac{1}{3}x}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

3б. $\displaystyle\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx$.

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени* $t = 4-3x$. Тогда

$$\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4-3x \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^{-7}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-7}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-7+1}}{-7+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot(-6)}\cdot t^{-6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t^6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C\right)' = \frac{1}{18}\left((4-3x)^{-6}\right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{18}(-6)(4-3x)^{-6-1}(4-3x)' + 0 = -\frac{1}{3}(4-3x)^{-7}(-3) = \frac{1}{(4-3x)^7}.$$

Получена подынтегральная функция.

Интеграл под буквой *в* в контрольной работе также берется методом замены переменной (подстановкой). Ознакомимся с примерами таких подстановок.

1*в*. $\displaystyle\int x\sin(2-3x^2)dx$.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометрической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента в качестве множителя.

$$\int x\sin(2-3x^2)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-3x^2 \\ dt = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \int \sin t\left(-\frac{1}{6}dt\right) = -\frac{1}{6}\int \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{6}\cos t + C = \frac{1}{6}\cos(2-3x^2) + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C\right)' = \frac{1}{6}\left(-\sin(2-3x^2)\right)(-6x)+0 = x\sin(2-3x^2).$$

2*в*. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array} \right| = \int e^t\left(2dt\right) = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Проверка.

$$\left(2e^{\sqrt{x}}+C\right)' = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' + C' = 2e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

3*в*. $\int \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\, dx$.

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = 3-4\cos 3x \\ dt = -4(-\sin 3x)\cdot 3dx \\ \sin 3x \cdot dx = \dfrac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t} \cdot \frac{1}{12} dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}} \cdot dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{t^{7/6}}{7/6} + C = \frac{1}{14}\sqrt[6]{(3-4\cos 3x)^7} + C.$$

Проверка.

$$\left[\frac{1}{14}(3-4\cos 3x)^{\frac{7}{6}} + C\right]' = \frac{1}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot(3-4\cos 3x)^{\frac{1}{6}} \cdot (3-4\cos 3x)' =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot(3-4\cos 3x)^{\frac{1}{6}} \cdot \left[0-4\cdot(-\sin 3x)\cdot(3x)'\right] = \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

4*в*. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2} dx$.

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 2+x^4 \\ dt = 4x^3dx \\ x^3dx = \dfrac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4(2+x^4)} + C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{1}{4(2+x^4)} + C\right)' = -\frac{1}{4}(-1)\left(2+x^4\right)^{-2}\left(2+x^4\right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+x^4\right)^{-2}\cdot 4x^3 + 0 = \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}.$$

Интеграл под буквой *г* берется методом интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

1*г*. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \underset{u}{\ln x} \cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = \ln x; & du = \dfrac{1}{x}dx; \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; & v = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{1}{3}} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int vdu = \ln x \cdot 3\sqrt[3]{x} - \int 3x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x}dx = 3\sqrt[3]{x}\cdot\ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= 3\sqrt[3]{x}\cdot\ln x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt[3]{x}\cdot\ln x - 3\cdot 3\sqrt[3]{x} + C = 3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C.$$

Проверка.

$$\left(3\sqrt[3]{x}(\ln x - 3) + C\right)' = 3\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)'(\ln x - 3) + \sqrt[3]{x}(\ln x - 3)'\right) + C' =$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\ln x - 3) + \sqrt[3]{x}\,\frac{1}{x}\right) + 0 = x^{-\frac{2}{3}}(\ln x - 3) + 3x^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= x^{-\frac{2}{3}}\ln x - 3x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Что и требовалось показать.

2*г.* $\int (x-2)\sin 5x\,dx$.

$$\int \underbrace{(x-2)}_{u}\underbrace{\sin 5x\,dx}_{dv} = \left|\begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = x-2; & du = dx; \\ dv = \sin 5x\,dx; & v = \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array}\right| =$$

$$= uv - \int v\,du = (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) - \int -\frac{1}{5}\cos 5x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x\,dx = -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x +$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\int \cos 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}(x-2)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C.$$

Решения задач *г.*2 и *г.*3 даны без проверки. Студент может выполнить её самостоятельно.

3*г.* $\int (3-x)e^{\frac{x}{5}}dx$.

$$\int \underbrace{(3-x)}_{u}\underbrace{e^{\frac{x}{5}}dx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} \text{принимаем:} & \text{находим:} \\ u = 3-x; & du = -dx; \\ dv = e^{\frac{x}{5}}\,dx; & v = \int e^{\frac{x}{5}}\,dx = 5\int e^{\frac{x}{5}}d\left(\frac{x}{5}\right) = 5e^{\frac{x}{5}} \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v du = (3-x)\cdot 5e^{\frac{x}{5}} - \int 5e^{\frac{x}{5}}(-dx) = 5(3-x)e^{\frac{x}{5}} + 5\int e^{\frac{x}{5}}dx =$$

Определенный интеграл

Задачи 41 – 50

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

41. $xy = -3;$ $x - y - 4 = 0.$

42. $y = 3x^2 - 2;$ $y = 3x + 4.$

43. $xy = 3;$ $x + y - 4 = 0.$

44. $y = x^2 + 4x + 3;$ $y = -x + 3.$

45. $xy = 6;$ $x + y - 7 = 0.$

46. $y = 2x - x^2;$ $x + y = 0.$

47. $xy = 8;$ $x + y - 9 = 0.$

48. $y = x^2 - 3x - 4;$ $y = 2x - 4.$

49. $xy = -7;$ $y = x + 8.$

50. $y = x^2 + x + 1;$ $y = x + 2.$

Методические указания к решению задач 41 – 50

Определенный интеграл – это число, которое находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$; a, b – нижний и верхний пределы интегрирования, показывающие, как меняется переменная интегрирования x.

Формула Ньютона-Лейбница связывает определенный и неопределенный интегралы. Чтобы ею воспользоваться, следует взять сначала неопределенный интеграл, т.е. найти первообразную, причем удобно взять произвольную постоянную равной нулю: $C = 0$, а затем вычислить разность значений этой первообразной в верхнем и нижнем пределах.

Например:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Если функция $y = f(x)$ неотрицательная на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где S – площадь под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 2).

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

при этом $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a;b]$ (рис. 3).

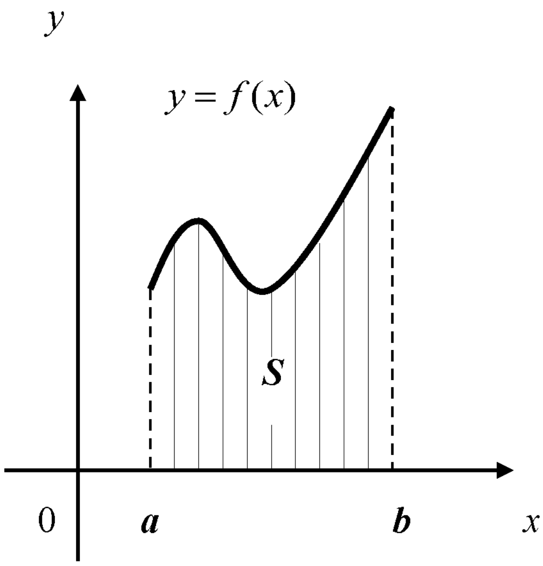


Рис. 2

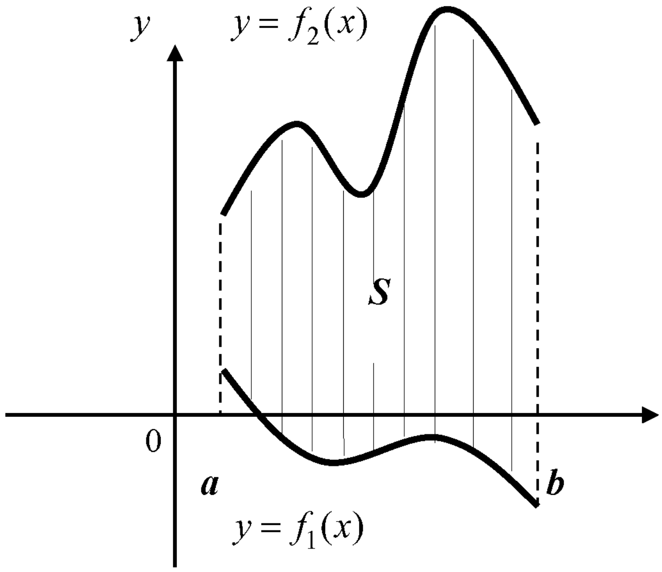


Рис. 3

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2 - 6x + 5$ и $y = x - 1$. Сделать чертеж.

Решение. Выполним чертеж.

Первое уравнение определяет параболу, а второе – прямую линию. Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат. Если уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, то вершина параболы находится в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

В данной задаче $x_0 = -\dfrac{-6}{2 \cdot 1} = 3$, $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$. Итак, вершина параболы – точка (3;– 4).

Точки пересечения параболы с осями:

С осью Ох: $y = 0$, тогда $x^2 - 6x + 5 = 0$. Решив квадратное уравнение (прил.1, п. 2), получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Точки пересечения параболы с осью Ox есть точки (1;0) и (5;0).

С осью Оу: $x = 0$, тогда $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$. Точка пересечения параболы с осью Oy есть точка (0;5).

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх, т.к. $a = 1 > 0$ (рис. 4). Прямую $y = x - 1$ строим по двум точкам, например, при $x = 0$, $y = -1$; при $x = 1$ $y = 0$. Получены точки: $(0;-1)$, $(1;0)$.

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5, \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; x_2 = 6.$$

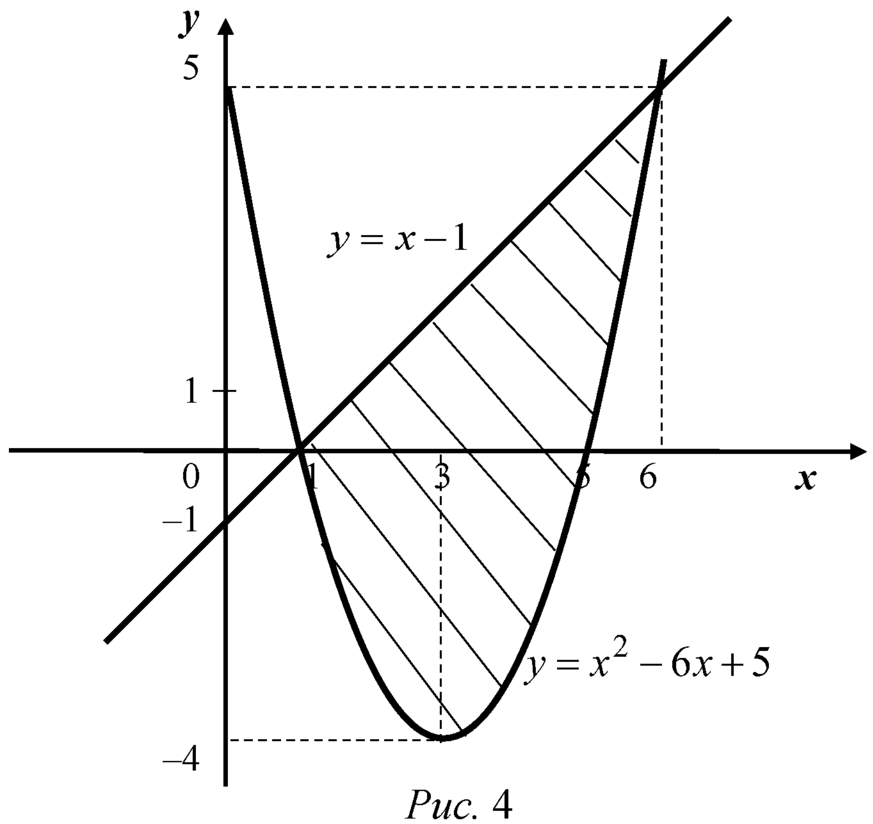


Рис. 4

Найдем соответствующие ординаты $y_{1,2}$ из уравнения $y = x-1$: $y_1 = 1 - 1 = 0$; $y_2 = 6 - 1 = 5$. Итак, точки пересечения параболы и прямой есть точки $(1;0)$ и $(6;5)$.

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой (рис. 4). Здесь функции $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$ и $f_2(x) = x - 1$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $x \in [1;6]$.

Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx=\int_1^6 \Big(x-1-(x^2-6x+5)\Big)dx=\int_1^6\Big(-x^2+7x-6\Big)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_1^6=\left(-\frac{6^3}{3}+7\cdot\frac{6^2}{2}-6\cdot 6\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+7\cdot\frac{1^2}{2}-6\cdot 1\right)=$$

$$=\left(-\frac{216}{3}+7\cdot\frac{36}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}.$$

Ответ. Искомая площадь равна: $S=\dfrac{125}{6}=20\dfrac{5}{6}$ *кв. ед.*

Замечание. Если одна из линий – гипербола, например, $xy=-6$, то ее можно построить по точкам. Удобно взять точки с абсциссами $x=\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$ и вычислить соответствующие им ординаты *y,* в нашем случае по формуле $y=-\dfrac{6}{x}$.

Если в ответе задачи получен логарифм числа, то значение логарифма можно взять из прил.1, п. 9.

Функции нескольких переменных

Задачи 51–60

Для функции $z=f(x;y)$ найти:

а) полный дифференциал;

б) градиент функции *z* в точке $M(x_0;y_0)$;

в) производную функции $z=f(x;y)$ в точке $M(x_0;y_0)$ по направлению вектора $\vec{a}=\{a_x;a_y\}$.

61. $z=x^2\cdot\ln(4x+3y)$, $M(1;-1)$, $\vec{a}=\{-3;4\}$.

62. $z=x^3\cdot e^{xy^2}$, $M(1;1)$, $\vec{a}=\{5;12\}$.

63. $z=2^y\cdot\sqrt{6x+3y}$, $M(2;-1)$, $\vec{a}=\{4;-3\}$.

64. $z = \dfrac{5y}{x^2+3}$, $M(0;0)$, $\vec{a} = \{5; -12\}$.

65. $z = x^2 \cdot e^{-3x+2y}$, $M(1;2)$, $\vec{a} = \left\{1; -\dfrac{4}{3}\right\}$.

66. $z = y \cdot \ln(x^2 - y - 2)$, $M(2;1)$, $\vec{a} = \{-4; 3\}$.

67. $z = xy \cdot e^{2x^2 - y}$, $M(1;1)$, $\vec{a} = \{4; 3\}$.

68. $z = y^2 \cdot \operatorname{arctg}(3x - y^2)$, $M(3;3)$, $\vec{a} = \left\{-6; \dfrac{5}{2}\right\}$.

69. $z = 2y \cdot e^{5x - y^2}$, $M(2;1)$, $\vec{a} = \{3; -4\}$.

70. $z = \sqrt{x} \cdot \arcsin(x^2 + 2y)$, $M(2;-2)$, $\vec{a} = \left\{6; -\dfrac{5}{2}\right\}$.

Методические указания к решению задач 51 – 60

Частные производные, полный дифференциал

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$, где x и y – независимые переменные.

Для нахождения частных производных используют таблицу производных и правила дифференцирования для функций одной переменной.

Частная производная по x функции $z = f\,(x; y)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной x в предположении, что y – постоянная величина. Обозначения частной производной по x: $z'_x(x; y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, или $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Частная производная по y функции $z = f\,(x; y)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной y в предположении, что x – постоянная величина. Обозначения частной производной по y: $z'_y(x; y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

где z'_x, z'_y – частные производные функции z; dx и dy – дифференциалы независимых переменных.

Градиент функции, производная по направлению

Вектор – это направленный отрезок. Его можно задать в координатной форме: $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$. Числа a_x, a_y называются координатами вектора – это проекции вектора на оси *Ox* и *Oy* соответственно (рис. 5).

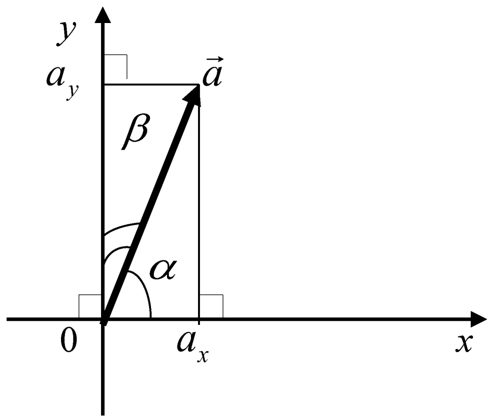


Рис. 5

Пусть α - это угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси *Ox,* а β – угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси *Oy*. Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ и вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ – длина вектора $\vec{a}$.

Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ называется вектор, координаты которого равны значениям частных производных функции *z*, вычисленным в точке $M(x_0; y_0)$:

$$\text{grad } z = \{z'_x; z'_y\} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Этот вектор указывает направление скорости *наибольшего роста* функции z в точке *M,* а его модуль $|\text{grad } z(M)|$ указывает величину этой скорости.

Производная функции $z = f(x;y)$ *по направлению* вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ в точке $M(x_0; y_0)$ показывает скорость изменения функции z в точке $M(x_0; y_0)$ в направлении вектора $\vec{a}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{d\vec{a}} = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta,$$

где z'_x и z'_y – частные производные, вычисленные в точке $M(x_0;y_0)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Если $\dfrac{dz}{d\vec{a}} > 0$, то функция z возрастает в точке M в направлении вектора $\vec{a}$. Если окажется, что $\dfrac{dz}{d\vec{a}} < 0$, то функция z убывает в точке M в направлении вектора $\vec{a}$.

Задача. Для функции $z = f(x;y) = y^2 e^{x^3 y}$ найти:

а) полный дифференциал;

б) градиент функции z в точке $M(0;1)$;

в) производную функции z в точке $M(0;1)$ по направлению вектора $\vec{a} = \left\{-\dfrac{3}{2}; 2\right\}$.

Решение. а) Сначала вычислим частные производные:

$$z'_x = \left(y^2 \cdot e^{x^3 y}\right)'_x = y^2 \cdot \left(e^{x^3 y}\right)'_x =$$

$$= y^2 \cdot e^{x^3 y}(x^3 y)'_x = y^2 \cdot e^{x^3 y} \cdot 3x^2 y = 3x^2 y^3 e^{x^3 y},$$

здесь $y = const$ и использована формула $\left(e^u\right)'_x = e^u \cdot u'_x$;

$$z'_y = \left(y^2 \cdot e^{x^3 y}\right)'_y = \left(y^2\right)'_y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot \left(e^{x^3 y}\right)'_y =$$

$$= 2y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y}(x^3 y)'_y = 2y \cdot e^{x^3 y} + y^2 \cdot e^{x^3 y} \cdot x^3 = y(2 + x^3 y)e^{x^3 y},$$

здесь $x = const$ и использована формула $\left(e^u\right)'_y = e^u \cdot u'_y$.

Полный дифференциал:

$$d\,z = 3x^2y^3e^{x^3y}\,dx + y(2+x^3y)e^{x^3y}dy\,.$$

б) Найдем градиент функции z в точке $M(0;1)$.

$$z'_x(0;1) = 3\cdot 0^2\cdot 1^3\cdot e^{0^3\cdot 1} = 0; \qquad z'_y(0;1) = 1\cdot(2+0^3\cdot 1)\cdot e^{0^3\cdot 1} = 2;$$

$$grad\,z(0;1) = \left\{z'_x(0;1); z'_y(0;1)\right\} = \left\{0;2\right\}.$$

в) Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \left\{-\frac{3}{2};2\right\}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Подставим все найденные значения в формулу для производной по направлению:

$$\frac{dz}{d\vec{a}} = z'_x(0;1)\cdot\cos\alpha + z'_y(0;1)\cdot\cos\beta = 0\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{5}.$$

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2 И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Линейная алгебра

Задачи 1–10

Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение. Найти его по правилу Крамера и матричным способом. Проверить полученное решение на компьютере с помощью ***Excel***, используя метод Крамера и метод обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -8 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

Методические указания к решению задач 1 – 10

Матрицы

Прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах, называется ***матрицей*** размера $m \times n$.

Матрицы обозначения прописными буквами латинского алфавита, например, $A, B. C, \ldots$, а для обозначения ***элементов*** матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где $i = \overline{1, m}$ (т.е. $i = 1, 2, 3, \ldots, m$), $j = \overline{1, n}$. Индекс i указывает номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Например, матрица

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

или в сокращенном записи $A=(a_{ij})$.

Матрица A^T называется ***транспонированной*** по отношению к матрице A, если столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T с теми же номерами. Например, для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

транспонированной будет матрица

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Матрица, в которой число строк равняется числу ее столбцов $(m=n)$, называется ***квадратной матрицей порядка*** *n*.

Главной диагональю квадратной матрицы называют диагональ, идущую из левого верхнего угла этой матрицы в ее правый нижний угол. На ней стоят элементы $a_{11}, a_{22},\dots, a_{nn}$.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю.

Две матрицы называются ***равными***, если их размеры совпадают и выполняется условие равенства элементов, расположенные на соответствующих местах этих матриц.

При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

Умножение(произведение) матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p}=\left(b_{jk}\right)$ определяется только при условии, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. ***Произведением***

матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot2+3\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot3+1\cdot2 & 2\cdot(-1)+3\cdot(-2)+1\cdot1 \\ (-1)\cdot2+0\cdot1+1\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot3+1\cdot2 & (-1)\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 13 & -7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы порядка n справедливо равенство

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

Определители

Для квадратных матриц n-го порядка вводится важнейшая числовая характеристика, которую называют ***определителем*** (детерминантом) и часто обозначают одним из символов: Δ, $\det A, |A|$

.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Рассмотрим сначала квадратную матрицу второго порядка (n=2). Ее определителем называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Например: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 5 - (-3)\cdot 1 = -10 + 3 = -7.$

Определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков. С этой целью вводятся понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка (1) называется определитель *(n-1)*-го порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} называется минор, взятый со знаком “плюс” или “минус”по формуле: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема Лапласа. Определитель произвольного порядка n равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Таким образом, вычисление определителя произвольного порядка n сводится к вычислению определителей *(n-1)*-го порядка, который, в свою очередь, сводится к вычислению определителей *(n-2)*-го порядка и так далее до определителей второго порядка, которые вычисляются по правилу, указанному выше..

Пример. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. Найти $M_{12}, \quad A_{12}, \quad \Delta$.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-2) = 2.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (4-6) + (-2) = -12.$$

.

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной матрицы A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Операция нахождения обратной матрицы имеет смысл только для ***невырожденных*** матриц, определитель которых отличен от нуля.

Один из способов нахождения обратной матрицы состоит в следующем. Для матрицы A вычисляют определитель Δ и для всех ее элементов a_{ij} – их алгебраические дополнения A_{ij}. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Следует обратить внимание на порядок расположения алгебраических дополнений в данной формуле.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисляем все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=-7,\quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-6.$$

Находим определитель матрицы Δ, путем его разложения по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2A_{11}+(-4)A_{12}+A_{13}=2\cdot(-2)+(-4)\cdot 2+4=-8$$

Таким образом, согласно формуле (2)

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4+3-7 & 8-15+7 & -2+9-7\\ 4+1-5 & -8-5+5 & 2+3-5\\ 8-2-6 & -16+10+6 & 4-6-6\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений *(СЛАУ)*, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется выражение следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Здесь a_{ij} и b_i - произвольные числа $(i = 1,2,\ldots,m,\ \ j = 1,2,\ldots,n)$, которые называются соответственно ***коэффициентами*** и ***свободными членами*** системы (3). Первый индекс у коэффициентов при неизвестных означает номер уравнения, второй индекс соответствует номеру неизвестного x_j. Каждый член уравнения содержит только одно неизвестное, причем неизвестные входят в уравнения только в первой степени. Отсюда и происходит название системы – ***линейная***. Матрица $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$, составленная из коэффициентов системы (3), называется матрицей этой системы.

Решением данной системы уравнений называется n значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$, при подстановки которых в эту систему, каждое из уравнений системы превращается в верные равенства.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решений, то она называется ***несовместной***. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Две *СЛАУ* называются ***равносильными***, или ***эквивалентными***, если они имеют одно и то же множество решений.

Решение систем n линейных уравнений с n переменными. Метод Крамера

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{4}$$

Число неизвестных в этой системе равно числу переменных. Если определитель Δ матрицы системы *A* (определитель системы*)* отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=\overline{1,n}$$

где Δ_i – определители, получающиеся из определителя Δ путем замены *i*-го столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=7 \\ -x_1-x_2+\ \ x_3=2 \\ -x_1-2x_2-2x_3=21. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=4+15+2=21$$

Так как $\Delta\neq0$, то система имеет единственное решение.

Вычислим вспомогательные определители также путем их разложения по элементам первой строки:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 21 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 21 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 21 & -2 \end{vmatrix} = 28 - 125 + 34 = -63,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 21 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 21 & -2 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 21 \end{vmatrix} = -25 - 21 - 38 = -84,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 21 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 21 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 21 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -17 - 95 + 7 = -105.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-63}{21} = -3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-84}{21} = -4; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-105}{21} = -5.$$

Проверка. Все три уравнения системы при подстановке в них решения $x_1 = -3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -5$ обратились в верные равенства:

-3 + 20 – 10 = 7
3 + 4 – 5 = 2
3 + 8 + 10 =21

Следовательно, полученное единственное решение системы верно.

Ответ: $x_1 = -3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -5$.

Матричный способ решения СЛАУ

Запишем *СЛАУ* (4) в ***матричной форме***. Обозначим через A невырожденную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Напомним, что для невырожденной матрицы определена обратная матрица.

Тогда систему уравнений (4) можно записать в следующей матричной форме

$$A \cdot X = B, \qquad (5)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Решение системы (5) в матричной форме имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (6)$$

Полученная формула дает решение *СЛАУ* (4).

Пример. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы системы путем его разложения по первому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 2,$$

$$A_{23} = -1, \quad A_{31} = 2, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 3.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме по формуле (6) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25-36+16 \\ 0+18-8 \\ 0-9+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Используя условия равенства матриц, получим:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Задачи 11-20

Решить *СЛАУ* методом Гаусса

11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 - 18x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

Методические указания к решению задач 11 – 20

Метод Гаусса

Одним из наиболее эффективных методов решения систем линейных уравнений является ***метод исключения неизвестных Гаусса.*** Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований, *СЛАУ* приводится к эквивалентной системе, некоторого специального вида.

К *элементарным преобразованиям* относятся:

1. **перестановка местами двух или нескольких уравнений;**
2. **умножение обеих частей какого–либо из уравнений на любое число, отличное от нуля;**
3. **прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженного на любое число.**

Пусть мы имеем *СЛАУ* общего вида (3). Метод Гаусса состоит в выполнении ряда однотипных шагов, на каждом из которых производится исключения одного из неизвестных, с возможной перестановкой уравнений в системе и удалением из системы одинаковых уравнений и уравнений-тождеств.

При использовании метода Гаусса решение *СЛАУ* разбивается на два этапа: прямой ход и обратный ход.

На первом шаге прямого хода осуществляется выбор ***ведущего уравнения***, в качестве которого можно взять любое, например, самое верхнее(первое) уравнение системы. В этом уравнении выбирается ***ведущая неизвестная,*** в качестве которой можно взять любую с отличным от нуля коэффициентом. Удобно, чтобы коэффициент при этой неизвестной был равен единице. Уравнение с выбранной ведущей неизвестной помещается на первое место системы.

С помощью ведущего уравнения, используя 3-е элементарное преобразование, исключается ведущая неизвестная из всех оставшихся уравнений системы.

Если на любом шаге процесса появляется уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0,$$

то оно удаляется (“вычеркивается”) из системы. Появление уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b$$

при $b \neq 0$ приводит к противоречию, из которого следует заключение о ***несовместности*** исходной системы уравнений.

Первое ведущее уравнение на следующих шагах метода Гаусса оставляем неизменным, выделяя в нём каким-либо образом ведущее переменное (например, обводя его кружком или подчеркивая).

На втором шаге поступаем полностью аналогично с оставшейся частью системы, которую получили на первом шаге. И так далее.

Процесс решения на первом этапе заканчивается после того, когда в полученной системе все уравнения будут с выделенными ведущими неизвестными.

Выделенные в процессе решения неизвестные называются ***базисными переменными***, а остальные - ***свободными переменными***.

На ***обратном ходе*** метода Гаусса начиная с нижнего уравнения полученной системы, выражаем базисные переменные через свободные, подставляя при этом выражения для уже найденных базисных переменных в вышестоящее уравнение.

В результате, получим эквивалентную систему уравнений, в которой каждая базисная переменная выражена через свободные. Такую систему называют ***общим решением*** *СЛАУ*.

Частные решения *СЛАУ* получаются из общего решения, если задать произвольные значения свободным переменным.

Базисным решением *СЛАУ* называют такое частное решение, при котором свободные переменные равны нулю.

Пример 1 **.** Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} \underline{x_1}+3x_2-x_3-x_4=-4 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-x_4=5 \\ x_1+8x_2-3x_3-2x_4=-11 \\ -3x_1-4x_3+x_3+2x_4=5 \end{cases}$$

Решение. Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее неизвестное - x_1 (в уравнении эта переменная подчеркнута). С помощью ведущего уравнения исключим x_1 из остальных уравнений системы путем прибавления к ним ведущего уравнения, умноженного соответственно на -3, -1 и 3.

$$\begin{cases} \underline{x_1}+3x_2-x_3-x_4=-4 & -3 \quad -1 \quad\ 3 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-x_4=5 & \leftarrow\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x_1+8x_2-3x_3-2x_4=-11 & \leftarrow \ \leftarrow\downarrow \quad \downarrow \\ -3x_1-4x_3+x_3+2x_4=5 & \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow\downarrow \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \underline{x_1}+3x_2-x_3-x_4=-4 \\ -11x_2+5x_3+2x_4=17 \\ 5x_2-2x_3-x_4=-7 \\ 5x_2-2x_3-x_4=-7 \end{cases}$$

Последние два уравнения системы одинаковые, поэтому одно из них вычеркивается. На этом первый шаг процесса заканчивается.

За второе ведущее уравнение примем последнее (третье) уравнение системы, умножим обе его части на (-1), и поместим его на второе место оставшейся системы. За второе ведущее неизвестное в этом уравнении примем x_4.

$$\begin{cases} \underline{x_1}+3x_2-x_3-x_4=-4 \\ \quad -5x_2+2x_3+\underline{x_4}=7 \qquad -2 \\ \quad -11x_2+5x_3+2x_4=17 \;\leftarrow\downarrow \end{cases}$$

В результате исключения ведущего неизвестного из последнего уравнения системы получим

$$\begin{cases} \underline{x_1}+3x_2-x_3-x_4=-4 \\ \quad -5x_2+2x_3+\underline{x_4}=7 \\ \quad -x_2+x_3 \qquad =3 \end{cases}$$

Теперь только последнее уравнение системы не было выбрано в качестве ведущего уравнения. Любую из неизвестных x_2 или x_3 в этом уравнении можно выбрать в качестве ведущей неизвестной. Пусть, например, x_3 – ведущая неизвестная. На этом прямой ход метода Гаусса закончен.

В итоге x_1, x_3, x_4 – базисные переменные, x_2 - свободная переменная.

Обратным ходом получаем выражения для базисных (подчеркнутых) переменных. Из нижнего уравнения имеем

$$x_3 = 3 + x_2.$$

Далее из второго уравнения, с учетом полученного выражения для базисной переменной $x_3 = 3 + x_2$, получим

$$x_4 = 7 + 5x_2 - 2x_3 = 7 + 5x_2 - 2(3 + x_2) = 1 + 3x_2.$$

Аналогично из первого уравнения

$$x_1 = -4 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -4 - 3x_2 + 3 + x_2 + 1 + 3x_2 = x_2.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_4=1+3x_2 \\ x_3=3+x_2 \end{cases},$$

где x_1, x_3, x_4 – базисные переменные, x_2 – свободная переменная. При $x_2 = 2$, частным решением будет $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5,\ x_4 = 7$. Базисным решением будет $x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1.$

.

Пример 2. Исследовать и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5 \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 - 25x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

Примем за первое ведущее уравнение первое уравнение системы, а за первое ведущее неизвестное x_2 (в других уравнениях все коэффициенты при x_2 кратны 5)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5\underline{x_2} - 4x_3 = 3 & (-3) & (-1) & & (5) \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 = 5 & \leftarrow\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 5x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1 & \leftarrow & \leftarrow\downarrow & & \downarrow \\ x_1 - 25x_2 - 2x_3 = -4 & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow\downarrow \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований (как и в предыдущем случае) приводим систему к виду

$$\begin{cases} 2x_1 + 5\underline{x_2} - 4x_3 = 3 \\ -3x_1 \qquad + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 \qquad - 3x_3 = -2 \\ 11x_1 \qquad - 22x_3 = 11 \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на (-1) и получим, что в двух уравнениях системы левые части уравнения одинаковые, а правые отличаются. Из полученного противоречия следует, что данная система несовместна.

Математическое программирование

Задачи 21-30

Решить графически задачу линейного программирования при условии неотрицательности решения $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$:

21. $$f = 2x_1 - x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 - 2x_2 \le -2 \\ 2x_1 - x_2 \ge -2 \end{cases}$$

22. $$f = 4x_1 - 3x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5 \\ 5x_1 - x_2 \le 20 \\ 8x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 0 \end{cases}$$

23. $$f = x_1 + 2x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x \quad \le 12 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$$

24. $$f = 2x_1 + 5x_2 \to min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ -2x_1 + 5x_2 \ge 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

25. $$f = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_2 - x_1 \ge -2 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

26. $$f = x_1 + 2x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$$

27. $f = 10x_1 + 3x_2 \to min$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 33 \\ x_1 + 6x_2 \ge 14 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 6 \end{cases}$$

28. $f = 2x_1 - 4x_2 \to min;$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$$

29. $f = -x_1 + 4x_2 \to min;$
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 \le -9 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ -2x_1 - x_2 \le -8 \end{cases}$$

30. $f = 3x_1 + 5x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Методические указания к решению задач 21 – 30

Постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – раздел математики, посвященный методам исследования задач, связанных с нахождением экстремумов (максимумов и минимумов) линейной функции нескольких переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ при наличии линейных ограничений (равенств или неравенств) на эти переменные. Эта линейная функция называется ***целевой***, а ограничения называется ***системой ограничений.***

Методами линейного программирования решаются задачи о распределении ресурсов, планировании выпуска продукции, ценообразовании и другие экономические задачи.

Построение математической модели экономической задачи включает следующие этапы:

1) выбор переменных задачи;
2) составление системы ограничений;
3) выбор целевой функции.

В ***канонической*** (или ***основной***) задаче линейного программирования (*ЛП*) требуется найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to max\ (\ min\ )$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ \ldots+\ a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+\ a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\, n},$$

где x_j – неизвестные;

a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные.

Стандартной задачей линейного программирования называется вышеприведенная задача, в которой все ограничения имеют вид неравенств.

Отметим, что для любой из задач линейного программирования решение определяется при условии ***неотрицательности*** искомых переменных: $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$.

Допустимым решением (планом) задачи *ЛП* называется вектор $X=\left(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_n\right)$, удовлетворяющий системе ограничений.

Множество допустимых решений образует ***область допустимых решений*** *(ОДР)*.

Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется ***оптимальным решением*** задачи линейного программирования.

2.2. Графический метод решения задачи ЛП

Графический метод применяется для решения стандартных задач *ЛП* с двумя переменными

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2 \to max\ (\ min\ )$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$$

В этом случае на плоскости x_1Ox_2 можно изобразить область допустимых решений, определяемую системой ограничений задачи.

Областью решения первого неравенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

является одна из двух полуплоскостей, границей которых является прямая

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

Для того чтобы определить, какая из этих двух полуплоскостей является областью решения данного неравенства, достаточно подставить в неравенство координаты любой (пробной) точки, не лежащей на граничной прямой. Если неравенство выполняется, то областью решения является полуплоскость, содержащая данную точку, если же неравенство не выполняется, то областью решения является полуплоскость, не содержащая пробную точку. Удобно в качестве пробной точки выбирать точку (0,0) - начало координат.

Для всех остальных ограничений аналогичным образом выбираем нужные полуплоскости

Областью допустимых решений исходной задачи является общая часть всех неравенств-ограничений.

Если система ограничений совместна, то областью допустимых решений задачи является выпуклое множество, которое называется ***многоугольником решений***.

Рассмотрим целевую функцию $f = c_1x_1 + c_2x_2$, являющуюся линейной функцией координат (x_1, x_2). Линией уровня этой функции, вдоль которой она принимает постоянное значение, будет некоторая прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = C$. Меняя значение постоянной C, получим различные прямые, параллельные между собой, т.е. они образуют на плоскости x_1Ox_2 семейство параллельных прямых, каждой из которой отвечает определенное постоянное значение C.

Нормальный вектор этого семейства параллельных прямых

$$\bar{c} = gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1; c_2)$$

указывает направление ***наискорейшего возрастания*** функции двух переменных $f(x_1, x_2)$.

Запишем алгоритм решения задачи:

1. Находим область допустимых решений системы ограничений задачи (*ОДР*).

2. Строим направляющий вектор $\bar{c} = (c_1; c_2)$, который указывает направление возрастания целевой функции. .

3. Строим некоторую начальную прямую целевой функции $c_1 x_1 + c_2 x_2 = C$, которую выбираем, например, проходящей через такую вершину многоугольника решений, по отношению к которой *ОДР* располагается либо в верхней, либо в нижней полуплоскости. Для задач на максимум начальную прямую перемещаем в направлении вектора $\bar{c}$, а в случае нахождения минимума - в направлении, противоположном $\bar{c}$.

Перемещение начальной прямой производится до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка, определяющая единственное решение задачи *ЛП*, и будет точкой экстремума.

Если же при таком передвижении начальная прямая при выходе из *ОДР* совпадет с одной из сторон многоугольника решений, то целевая функция примет одно и то же экстремальное значение во всех точках данной граничной прямой.

Задача *ЛП* может быть неразрешима, если определяющие ее ограничения окажутся противоречивыми.

4. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Пример. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых (на 1 кг мороженого) и суточные запасы даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого	Запас, кг

	Сливочное	*Шоколадное*	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного – 14 р.

Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Обозначим через x_1 – суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг; x_2 – суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

Составим математическую модель задачи.

Целевая функция, определяющая доход от реализации продукции, будет иметь вид

$$f = 16x_1 + 14x_1 \rightarrow max$$

при условиях - ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365, \\ x_1 - x_2 \le 100, \\ x_2 \le 350, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Строим область допустимых решений (рис.1).

Граничная прямая первого ограничения $0{,}8x_1 + 0.5x_2 = 400$ делит всю плоскость на две полуплоскости. Для определения полуплоскости, в которой выполняется первое неравенство, в качестве пробной точки возьмем точку (*0,0*). Подставив ее координаты в неравенство $0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400$ убеждаемся, что она является “правильной ” точкой (0<400) т.е. точкой, лежащей в полуплоскости, все точки которой удовлетворяют данному неравенству. Аналогичное рассмотрение других ограничений позволяет построить область допустимых решений *OABДEF* задачи, которая является общей частью полуплоскостей – областей решений всех неравенств системы ограничений.

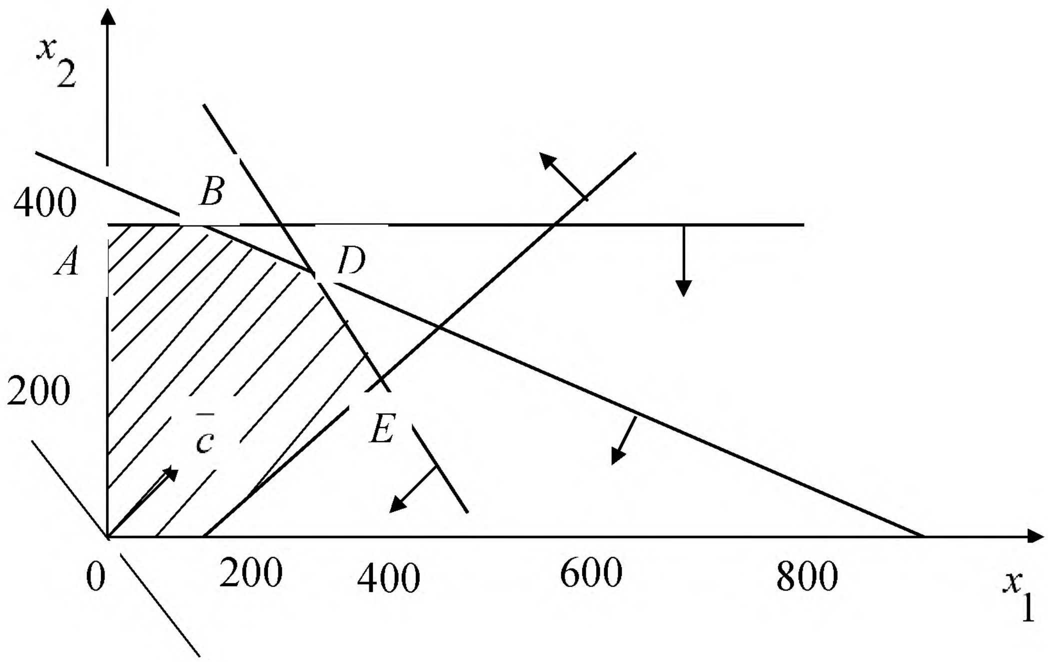


Рис. 1.

Для нахождения оптимального решения в построенной *ОДР* строим вектор $\bar{c} = (16, 14)$ и линию уровня $16x_1 + 14x_2 = 0$, проходящую через начало координат, перпендикулярную вектору $\bar{c}$. Далее перемещаем эту прямую по направлению вектора $\bar{c}$. Точкой выхода из области допустимых решений является точка *D*, в которой целевая функция *f* принимает максимальное значение. Ее координаты определяются как пересечение соответствующих прямых, заданных уравнениями

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получим координаты точки *D*(312,5;300), в которой и будет оптимальное решение, то есть $x_1 = 312{,}5$; $x_2 = 300$. При этом

$f_{max} = 16 \cdot 312{,}5 + 14 \cdot 300 = 9200$ (р.)

Таким образом, фирма должна выпускать в сутки 312,5 кг сливочного мороженого и 300 кг шоколадного мороженого, при этом максимально возможный доход от реализации составит 9200 р.

Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Задачи 31–40

Для сигнализации на складе установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при необходимости первое устройство сработает, составляет p_1, для второго и третьего устройства эти вероятности равны соответственно p_2 и p_3. Найти вероятность того, что в случае необходимости сработают:

а) все устройства;

б) только одно устройство;

в) только два устройства;

г) хотя бы одно устройство.

№	p_1	p_2	p_3
31	0,7	0,85	0,9
32	0,75	0,9	0,8
33	0,95	0,9	0,75
34	0,98	0,85	0,8
35	0,75	0,8	0,95
36	0,85	0,95	0,8
37	0,9	0,85	0,95
38	0,95	0,75	0,7
39	0,8	0,85	0,9
40	0,7	0,9	0,98

Методические указания к решению задач 31-40

Теория вероятностей – это раздел математики, где изучаются закономерности массовых случайных явлений.

Испытание – это изначальное понятие, разъясняется как наблюдение, явление, действие, опыт и прочее.

Событие трактуется как результат (исход) испытания. Например, стрельба по мишени: выстрел – это испытание, попадание в цель – это событие.

События называются:

несовместимыми, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других;

равновозможными, если по условиям симметрии нет оснований считать появление какого-либо из них более возможным по отношению к другим.

Достоверным называются событие, которое обязательно произойдет в результате испытания.

Невозможным называются событие, которое в результате испытания произойти не может.

События, которые могут появиться в результате испытания, образуют ***полную группу***, если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием. Отсюда следует, что если события, образуют полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из этих событий.

Рассмотрим пример с игральной костью. Игральная кость – это однородный кубик, на гранях которого изображено количество очков от 1 до 6, так как всего граней 6. Испытание – бросание игральной кости. Событие – выпадение определенного количества очков на верхней грани. Полную группу событий образуют шесть событий: E_1, E_2 , E_3 ,E_4 , E_5 , E_6, которые заключаются в том, что количество выпавших очков составит соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. По условию симметрии игральной кости все шесть элементарных исходов являются равновозможными.

Пусть событие A – “выпало четное число очков”. Это означает, что появились события E_2 или E_4 или E_6 . По этим трем элементарным исходам можно судить о появлении события A. Эти три интересующие нас события называют ***благоприятными*** событиями.

Пусть событие B –“количество выпавших очков больше четырех”. Это означает, что благоприятными являются события E_5 и E_6.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению числа благоприятствующих событию A элементарных исходов m к общему числу элементарных равновозможных исходов n, образующих полную группу,

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Для ***достоверного*** события все исходы благоприятные, то есть $m = n$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

Для ***невозможного*** события, которое не может произойти в результате испытания, $m = 0$:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

Для ***случайного*** события, которое может произойти, а может и не произойти в результате испытания, $0<P(A)<1$.

В примере с игральной костью всего элементарных равновозможных исходов $n = 6$, поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5, \quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Заметим, что $P(E_1) = P(E_2) = ... =P(E_6) = 1/6$, так как любому элементарному событию благоприятствует один исход (одна грань из шести).

Рассмотрим ещё пример. Пусть в урне 20 одинаковых шаров (по размеру, температуре, гладкости), которые отличаются только цветом, например, 12 из них красные, а остальные – белые. Испытание – извлечение наугад одного шара. Событие A – появление красного шара. Очевидно, что всего элементарных исходов $n = 20$ (по количеству шаров), причём все эти исходы равновозможные.

Благоприятными являются 12 исходов (по количеству красных шаров), поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=0{,}6.$$

При подсчете числа исходов используются некоторые правила и формулы комбинаторики

Суммой событий A и B называется событие C состоящее в том, что происходит хотя бы одно из слагаемых событий (либо A, либо B, *либо* A и B одновременно). Используют обозначение $C=A+B$ (или $C=A\bigcup B$).

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются ***противоположными.*** Например, пусть урна содержит черные и белые шары. Пусть событие A - извлечение из урны белого шара. Тогда противоположным этому событию является событие $\overline{A}$ - извлечение из урны черного шара.

Событие C, состоящее в одновременном наступлении как события A, так и события B, называется ***произведением*** событий A и B и обозначается $C=A\cdot B$ (или $C=A\bigcap B$).

Вероятность суммы двух ***несовместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Сумма вероятностей событий $A_1, A, \cdots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

Для противоположных событий A и $\overline{A}$:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условной вероятностью $P_A(B)$ события A при условии, что произошло событие B (более коротко, при условии B), называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло.

Аналогично определяется условная вероятность события B при условии A.

Событие B называется ***независимым*** от события A, если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности (появление события A не влияет на вероятность события B):

$P_A(B) = P(B)$. Отсюда следует, что и событие A также независимо от события B: $P_B(A) = P(A)$.

Теорема. Вероятность суммы двух ***произвольных*** событий выражается формулой:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Входящая в данную формулу вероятность $P(AB)$ произведения событий A и B вычисляется следующим образом:

Для ***независимых*** событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Для ***зависимых*** событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Для ***несовместных*** событий

$$P(AB) = 0,$$

Вероятность появления ***хотя бы одного*** из независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$ определяется формулой

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

где $q_i = 1 - p_i$ - вероятности соответствующих противоположных событий $\overline{A}_i$ ($i=1,2,\ldots n$).

Пример 1. Три стрелка делают по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания для первого стрелка 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) все стрелки попадут в цель;

б) только один стрелок попадет в цель;

в) только два стрелка попадут в цель;

г) цель будет поражена.

Решение

Обозначим: событие A – “первый стрелок попадет в цель”,

$$P(A) = 0{,}8\,; \qquad P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2\,;$$

событие B – “второй стрелок попадет в цель”,

$P(B) = 0{,}7$; $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$;

событие C – “третий стрелок попадет в цель”,

$P(C) = 0{,}6$; $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

События *A*, *B, C* – независимые.

а) Через *D* обозначим событие – “все стрелки попадут в цель”. Тогда $P(D) = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336$.

б) Через *E* обозначим событие – “ только один стрелок попадет в цель”. $P(E) == P(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) =$

$= P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 =$

$= 0{,}096 + 0{,}056 + 0{,}036 = 0{,}188$.

в) Через *F* обозначим событие – “ только два стрелка попадут в цель”. $P(F) = P(A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C) = =$
$P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452$.

г) Через *G* обозначим событие – “ цель поражена ”, которое произойдет, если осуществится событие *H* – “ в цель попадет хотя бы один стрелок”. Событие *H* является противоположным событию $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ (ни одного попадания).

$P(G) = P(H) == 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) ==1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) =$

$1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$.

Повторение испытаний

Задачи 41-50

Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен знак “изделие высшего качества” равна p.

1) На контроль поступило n изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен:

а) ровно m изделиям;

б) более чем k изделиям;

в) хотя бы одному изделию;

г) указать наивероятнейшее количество изделий, получивших знак высшего качества, и найти соответствующую ему вероятность.

№	n	p	m	k
41	8	0.4	5	6
42	7	0.3	4	5
43	6	0.2	3	4
44	5	0.3	2	3
45	4	0.6	1	2
46	9	0.2	6	7
47	7	0.5	3	4
48	6	0.4	1	3
49	8	0.6	4	5
50	5	0.5	3	2

Методические указания к решению задач *41-50*

Будем рассматривать только такие независимые испытания, в которых событие A имеет одинаковую вероятность. Пусть происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Тогда вероятность противоположного события $\overline{A}$ также постоянна в каждом испытании и равна $q=1-p$.

В теории вероятностей представляет особый интерес случай, когда в n испытаниях событие A осуществится k раз. Вероятность этого сложного события, состоящего из n испытаний, определяется ***формулой Бернулли***

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Наивероятнейшее число появлений события

Пусть в n повторных испытаниях событие A появляется k раз, где k может принимать значения: 0; 1; 2; 3; …; n (то есть $0 \le k \le n$). Для каждого из этих значений k можно найти соответствующую ему вероятность по формулам Бернулли или Лапласа.

То значение k, которому соответствует самая большая вероятность, называется ***наивероятнейшим*** числом появления события A.

Наивероятнейшее число k_0 находится как ***целое число,*** удовлетворяющее неравенствам:

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

причем k_0 может принимать либо одно значение, либо два соседних целых значения, когда вероятности их одинаковы.

Пример 2. Стрелок поражает цель с вероятностью 0,7.

1) С какой вероятностью в серии из 5 выстрелов он поразит мишень:
а) ровно два раза;

б) не менее четырех раз.

в) хотя бы один раз;

г) каково наивероятнейшее число попаданий и соответствующая ему вероятность?

Решение. По условию задачи: $p = 0,7$; $n = 5$; $k = 2$; $m = 4$;

Вероятность промаха $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$.

а) Вероятность попадания ровно два раза в серии из пяти выстрелов находим по формуле Бернулли

$$P_5(2)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}3^3=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}49\cdot 0{,}027=10\cdot 0{,}01323=0{,}1323$$

б) Событию D – “стрелок поразит мишень хотя бы один раз”, – противоположно событие $\overline{D}$ – “не поразит ни разу”, то есть стрелок промахнется все пять раз, следовательно, число попаданий $k=0$:

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P_5(0)=1-0{,}3^5=1-0{,}0024=0{,}9976.$$

в) Событие “стрелок поразит мишень не менее четырех раз” запишем в виде $m\geq 4$ и тогда

$$P_5(m\geq 4)=P_5(4)+P_5(5).$$

Здесь применена теорема сложения вероятностей несовместимых событий. Используя формулу Бернулли, найдем:

$$P_5(4)=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}7^4\cdot 0{,}3=5\cdot 0{,}2401\cdot 0{,}3=0{,}3601;$$

$$P_5(5)=\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0{,}7^5\cdot 0{,}3^0=0{,}7^5=0{,}1681;$$

$$P_5(m\geq 4)=0{,}3601+0{,}1681=0{,}5282.$$

г) Наивероятнейшее число попаданий k_o находим как целое число, удовлетворяющее неравенствам:

$$np-q\leq k_o\leq np+p;$$

$$5\cdot 0{,}7-0{,}3\leq k_o\leq 5\cdot 0{,}7+0{,}7;$$

$$3{,}2\leq k_o\leq 4{,}2;$$

$$k_o=4.$$

Соответствующую ему вероятность $P_5(4)$ вычислим по формуле Бернулли. В данной задаче она уже была найдена выше:

$$P_5(4)=0{,}3601.$$

Дискретная случайная величина

Задачи 51-60

В лотерее на каждые 100 билетов приходится m_1 билетов с выигрышем a_1 тыс. рублей, m_2 билетов с выигрышем a_2 тыс. рублей, m_3 билетов с выигрышем a_3 тыс. рублей и т.д. Остальные билеты из сотни не выигрывают.

Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Пояснить смысл указанных характеристик.

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5
51	20	1	10	2	5	8	3	10	1	15

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4
52	18	2	15	3	10	5	35	20

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4
53	15	3	12	10	8	15	4	20

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5	a_6	m_6
54	16	2	10	5	6	8	3	10	2	15	1	20

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5	a_6	m_6
55	10	5	8	10	6	12	4	15	2	18	1	20

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5	a_6	m_6

56	6	2	5	4	4	6	3	10	2	15	1	20

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5
57	14	2	12	8	8	15	5	20	1	30

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5
58	12	5	10	8	6	14	3	25	1	30

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4
59	8	4	5	6	4	12	2	20

№	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4
60	5	8	4	10	3	15	2	25

Методические указания к решению задач *51-60*

Соответствие между отдельными возможными значениями и их вероятностями называется ***законом распределения*** дискретной случайной величины. Обычно он записывается в виде таблицы, состоящей из двух строк. В верхней строке перечисляются все возможные значения случайной величины X, а в нижней – вероятности того, что случайная величина X примет эти значения.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется ***отклонением***.

Математическое ожидание квадрата отклонения называется ***дисперсией***:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \cdots + (x_n - a)^2 p_n$$

Второй способ вычисления дисперсии

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

где

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. В лотерее на каждые 100 билетов приходится 2 билета с выигрышем по 50 тыс. рублей, 5 билетов по 20 тыс. рублей, 10 билетов по 10 тыс. рублей, 20 билетов по 5 тыс. рублей и 25 билетов по 3 тыс. рублей. Остальные билеты не выигрывают. Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики.

Решение. Обозначим X тыс. рублей – величина выигрыша на один билет.

Очевидно, что X – случайная дискретная величина. Составим закон распределения этой случайной величины, перечислив все ее возможные значения и найдя соответствующие им вероятности. Число выигрышных билетов из 100 составляет: 2 + 5 + 10 + 20 + 25 = 62, значит, число невыигрышных билетов: 100 – 62 = 38.

Располагая величины возможного выигрыша $\boldsymbol{x_i}$ в порядке возрастания, получим следующую таблицу:

x_i	0	3	5	10	20	50
p_i	0,38	0,25	0,20	0,10	0,05	0,02

где $p_1 = P(X=0) = \dfrac{38}{100} = 0{,}38$; $p_2 = P(X=3) = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$ и т. д.

Отметим, что $\sum p_i = 0{,}38 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}02 = 1.$

а) Математическое ожидание случайной величины *X:*

$$M(X)=\sum x_i p_i=0\cdot 0{,}38+3\cdot 0{,}25+5\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}1+20\cdot 0{,}05+50\cdot 0{,}02=4{,}75.$$

Таким образом, ожидаемый средний выигрыш на 1 билет составляет 4,75 тыс. рублей.

б) Дисперсию случайной величины найдем двумя способами:

1) $$D(X)=\sum_{i=1}^{6}\left[x_i-M(X)\right]^2\cdot p_i=$$

$$=(0-4{,}75)^2\cdot 0{,}38+(3-4{,}75)^2\cdot 0{,}25+(5-4{,}75)^2\cdot 0{,}2+$$

$$+(10-4{,}75)^2\cdot 0{,}1+(20-4{,}75)^2\cdot 0{,}05+(50-4{,}75)^2\cdot 0{,}02=$$

$$=8{,}5738+0{,}7656+0{,}0125+2{,}7562+11{,}6281+40{,}9512=$$

$$=64{,}6874.$$

2) $$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$$

$$M(X^2)=\sum x_i^2\cdot p_i=0^2\cdot 0{,}38+3^2\cdot 0{,}25+5^2\cdot 0{,}20+10^2\cdot 0{,}1+20^2\cdot 0{,}05+50^2\cdot 0{,}02=$$

$$=0+2{,}25+5+10+20+50=87{,}25.$$

Тогда:

$$D(X)=87{,}25-(4{,}75)^2=87{,}25-22{,}5625=64{,}6875.$$

Результаты вычислений по обоим способам совпадают.

в) Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{64{,}6875}\approx 8{,}0429.$$

Таким образом, σ = 8,0429 тыс. рублей – характеристика разброса фактических значений выигрыша от найденного среднего значения a = 4,75 тыс. рублей, то есть основные значения случайной величины выигрыша находятся в диапазоне (4,75 ± 8,04285) тыс. руб., что соответствует таблице данных.

Непрерывные случайные величины

Задачи 61–70

Вес изготовленного серебряного изделия должен составлять a граммов. При изготовлении возможны случайные погрешности, в результате которых вес изделия случаен, но подчинен нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ граммов.

Требуется найти вероятность того, что:

a) вес изделия составит от α до β граммов;

б) величина погрешности в весе не превзойдет δ граммов по абсолютной величине.

№	a	σ	α	β	δ
61	50	2	30	55	5
62	60	2	56	62	6
63	70	3	64	80	7
64	80	3	75	92	8
65	90	4	78	95	9
66	100	4	80	110	10
67	120	5	100	150	10
68	130	5	125	140	12
69	140	6	130	155	14
70	150	6	145	160	15

Методические указания к решению задач *61–70*

Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина X может принимать любые значения из некоторого промежутка. Распределение вероятностей ее значений на этом промежутке задается дифференциальной функцией распределения *f(x)*. Эта функция называется также функцией плотности распределения вероятностей.

Исследования показали, что в большом числе встречающихся на практике случаев с достаточным основанием можно считать, что случайные величины подчиняются ***нормальному*** закону распределения. Дифференциальная функция нормального распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Графиком этой функции является кривая Гаусса, которая наглядно показывает, как распределена вероятность между возможными значениями *x*.

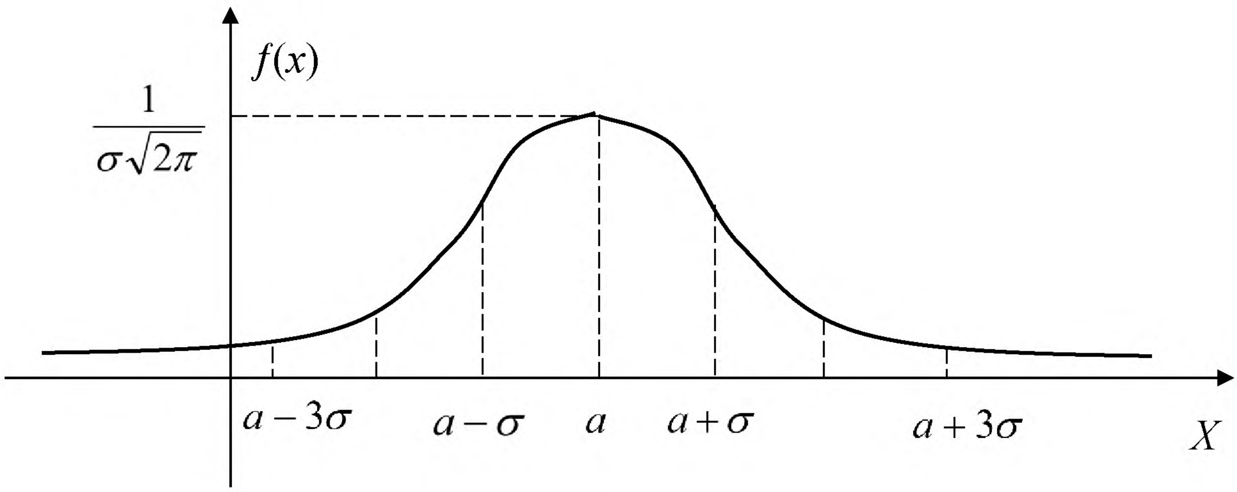


Рис.1

$$M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2,\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} == \sigma$$

Вероятность попадания ***нормально*** распределенной случайной величины X в интервал (α, β) выражается через функцию Лапласа по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения "$X - a$" меньше δ, равна:

$$P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

При $\delta = 3\sigma$ получим $P(|X - a| < 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) = 0{,}9973$. Отсюда следует формулировка правила ***трех сигм*:** почти достоверно (с вероятностью 0,997), что значения нормально распределенной случайной величины X отклоняются от среднего значения a не более, чем на 3σ

Пример. Заданы математическое ожидание a= 2 и среднее квадратическое отклонение σ=5 нормально распределенной случайной величины X. Требуется найти:

а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 4);

б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения "$X–a$" окажется меньше δ = 3.

Решение.

а) Воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

По условию задачи a=2, α = 1, β = 4, σ = 5. Следовательно,

$$P(1 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{5}\right) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}2) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}2).$$

По таблице (приложение): $\Phi(0{,}4) = 0{,}1554$; $\Phi(0{,}2) = 0{,}0793$, поэтому искомая вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал (1; 4) составит:

$$P(1 < X < 4) = 0{,}1554 + 0{,}0793 = 0{,}2347.$$

б) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения

«$X–a$» меньше $\delta = 3$, равна: $P(|X-a| < \delta) = 2 \cdot \Phi(\delta/\sigma)$,

$$P(|X-2| < 3) = 2 \cdot \Phi(3/5) = 2 \cdot \Phi(0,6) = 2 \cdot 0,2257 = 0,4514.$$

Это вероятность попадания случайной величины случайной величины X в промежуток (2 ± 3), то есть от -1 до 5.

Вероятности попадания в промежутки равны соответствующим площадям под кривой Гаусса. Напомним, что полная площадь под кривой равна 1.

Ответы: *а*) 0,2347; *б*) 0,4514.

Статистическое распределение выборки и его основные числовые характеристики

Задачи 71–80

По итогам выборочных обследований для некоторой категории сотрудников величина их дневного заработка X руб. и соответствующее количество сотрудников n_i представлены в виде интервального статистического распределения.

а) Построить гистограмму относительных частот распределения.

б) Найти основные характеристики распределения выборочных данных: среднее выборочное значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) Считая, что значения признака X в генеральной совокупности подчинены нормальному закону распределения, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания (генерального среднего значения) с надежностью γ, считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

71	X	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	γ =
	n_i	5	10	20	15	10	0,95

72	X	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50	γ =
	n_i	2	5	15	10	8	0,90

73	X	40-46	46-52	52-58	58-64	64-70	γ =
	n_i	5	10	20	15	10	0,92

74	X	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	$\gamma =$ 0,94
	n_i	7	12	18	13	5	

75	X	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80	$\gamma =$ 0,91
	n_i	5	12	20	15	8	

76	X	66-70	70-74	74-78	78-82	82-86	86-90	$\gamma =$ 0,93
	n_i	7	15	22	18	5	3	

77	X	36-42	42-48	48-54	54-60	60-66	66-72	$\gamma =$ 0,85
	n_i	8	13	15	15	7	2	

78	X	52-56	56-60	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80	$\gamma =$ 0,99
	n_i	5	15	25	18	12	8	2	

79	X	42-46	46-50	50-54	54-58	58-62	62-66	66-70	$\gamma = 0{,}98$
	n_i	8	15	19	22	12	5	1	

80	X	80-82	82-84	84-86	86-88	88-90	$\gamma = 0{,}88$
	n_i	3	7	20	15	5	

Методические указания к решению задач *71–80*

Выборочный метод – один из основных методов математической статистики. Его сущность заключается в том, что изучение большой совокупности объектов относительно некоторого количественного признака X производится по сравнительно небольшому числу случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется множество всех изучаемых объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (***выборкой***) называется множество объектов, отобранных для изучения из генеральной совокупности.

Выборка должна быть организована случайным образом, чтобы правильно представлять генеральную совокупность.

Объемом совокупности называется количество объектов в совокупности. Объем выборки n, как правило, значительно меньше объема $\boldsymbol{N}$ генеральной совокупности: $n << N$.

Данные выборки записываются в виде таблицы, называемой статистическим распределением выборки:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

В первой строке перечислены все наблюдаемые значения признака X в порядке их возрастания (или убывания). Они называются вариантами $\boldsymbol{x_i}$ (i = 1, 2, 3, …, k). Во второй строке указаны частоты $\boldsymbol{n_i}$ соответствующих вариант $\boldsymbol{x_i}$. Они показывают, сколько раз наблюдалось каждое значение признака X.

Очевидно, что сумма всех частот $\boldsymbol{n_i}$ равна объему выборки $\boldsymbol{n}$:

$$n_1+n_2+...+n_k=\sum_{i=1}^{k} n_i=n.$$

Основные числовые характеристики выборки

1. ***Средняя выборочная*** (среднее взвешенное значение признака в выборке):

$$\bar{x}_в=\frac{\sum_{i=1}^{к} x_i n_i}{n}=\frac{1}{n}\cdot(x_1\cdot n_1+x_2 n_2+\ldots+x_k n_k).$$

2. ***Дисперсия выборочная***. Характеризует разброс (рассеяние) значений вариант $\boldsymbol{x_i}$ от выборочного среднего значения $\overline{x_в}$ и измеряется в квадратных единицах признака X:

$$D_в=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_в)^2\cdot n_i=\frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x}_в)^2 n_1+(x_2-\bar{x}_в)^2\cdot n_2+...+(x_к-\bar{x}_в)^2 n_k\right].$$

Для вычисления дисперсии используется также другая, часто более удобная формула

$$D_в=\overline{x_в^2}-(\bar{x}_в)^2,$$

где

$$\overline{x_в}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k}x_i n_i; \qquad \overline{x_в^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i .$$

3. ***Среднее квадратическое отклонение выборки*** – характеристика рассеяния значений признака в выборке от среднего выборочного в единицах признака X:

$$\sigma_в=\sqrt{D_в} .$$

С помощью найденных выборочных характеристик $x_в, D_в, \sigma_в$ оцениваются соответствующие генеральные характеристики

$\bar{x}$ – генеральная средняя;

D – генеральная дисперсия;

σ – генеральное среднее квадратическое отклонение.

Оценки имеют следующий вид:

$$\bar{x}\approx\overline{x_в}; \qquad D\approx\frac{n}{n-1}\cdot D_в=S_в^2; \qquad \sigma\approx S_в=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_в},$$

где $S_в^2$ - так называемая исправленная выборочная дисперсия.

Приведенные оценки носят случайный характер, так как зависят от выборки. Они называются точечными и удовлетворяют следующим требованиям:

- ***несмещенность*** (отсутствие систематических ошибок);
- ***состоятельность*** (увеличение объема выборки повышает вероятность правильности оценки);
- ***эффективность*** (имеют самый незначительный разброс по сравнению с другими возможными оценками).

Основные характеристики выборки $\bar{x}_в, D_в, \sigma_в$ лишь приближенно характеризуют генеральную совокупность и могут оказаться далекими от соответствующих характеристик генеральной совокупности: $\bar{x}=a$, D, σ. Поэтому для последних используют интервальные оценки, когда неизвестная характеристика заключена в некотором интервале с заданной надежностью (вероятностью) **γ.**

Такой интервал называется доверительным. Значения надежности берутся, как правило, высокими: 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999, что соответствует 90; 95; 99 или 99,9%.

Если количественный признак X в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, то с вероятностью $\boldsymbol{\gamma}$ доверительный интервал, заданный выражением

$$(\overline{x_в} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_в} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}),$$

покрывает неизвестное математическое ожидание a. Здесь параметр t находится из соотношения $2 \cdot \Phi(t) = \gamma$ с помощью таблицы значений для интегральной функции Лапласа (приложение 2).

Величина δ называется предельной ошибкой оценки. Оценка тем точнее, чем меньше δ и, следовательно, доверительный интервал становится более узким. Величина δ зависит от n, σ и t. Очевидно, с увеличением объема выборки n уменьшается $\boldsymbol{\delta}$ и повышается точность оценки. При увеличении рассеяния σ длина интервала δ увеличивается, то есть оценка делается менее точной.

Часто статистическое распределение выборки носит интервальный характер. В этом случае указывают числовые частичные интервалы, куда попадают значения признака X, и n_i – количество значений, попавших в интервал с номером i. В качестве значений x_i выбирают середины частичных интервалов.

Значения n_i называются абсолютными частотами, их сумма равна объему выборки $\sum n_i = n$. Относительные частоты $w_i = n_i / n$ показывают долю значений x_i в общем объеме выборки. Очевидно, что сумма всех относительных частот (долей) равна 1: $\sum w_i = 1$.

Графически дискретное статистическое распределение изображается в виде ***полигона*** частот, обычно относительных. Полигон представляет собой ломаную линию, соединяющую соседние точки с координатами $(x_i ; w_i)$.

Интервальное статистическое распределение изображается на графике в виде ***гистограммы*** относительных частот. ***Гистограмма*** – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников. В основании каждого прямоугольника лежит частичный интервал, а высота прямоугольника определяется относительной частотой w_i, а чаще величиной w_i / h_i, где h_i – длина частичного интервала. При таком построении площадь каждого частичного прямоугольника равна относительной частоте $\boldsymbol{w_i}$, а сумма всех площадей, то есть площадь ступенчатой фигуры, равна единице: $\sum w_i = 1$.

Пример. В результате выборочного наблюдения за вкладами клиентов банка получено следующее распределение клиентов по величине вклада X в тыс. руб.:

X	До 100	100-200	200-300	300-400	400-500
n_i	10	18	20	32	28

где n_i – количество клиентов с величиной вклада в заданном интервале. Требуется:

а) Изобразить данное распределение графически, построив гистограмму относительных частот.

б) Найти основные характеристики выборки: среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) С надежностью 95% указать доверительный интервал для генеральной средней, приняв гипотезу о нормальном распределении признака X.

Решение. Найдем объем выборки n:

$$n = \sum n_i = 10+18+20+32+28 = 108,$$

то есть для обследования выбрано 108 клиентов. *а)* Вычислим относительные частоты для каждого частичного интервала:

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{108} = 0{,}093; \qquad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{108} = 0{,}167;$$

$$w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{20}{108} = 0{,}185; \qquad w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{32}{108} = 0{,}296;$$

$$w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{28}{108} = 0{,}259\,.$$

Рекомендуем все вычисления вести с точностью до 0,001.

Контроль: $\sum w_i = 0{,}093+0{,}167+0{,}185+0{,}296+0{,}259 = 1$.

В итоге получено следующее интервальное распределение относительных частот признака X:

X	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
w_i	0,093	0,167	0,185	0,296	0,259

Шаг разбиения, то есть длина каждого частичного интервала $h = 100$.

Построим гистограмму относительных частот (рис. 3), откладывая по оси OX значения признака X, а по вертикальной оси значения $\frac{w_i}{h} = \frac{w_i}{100}$.

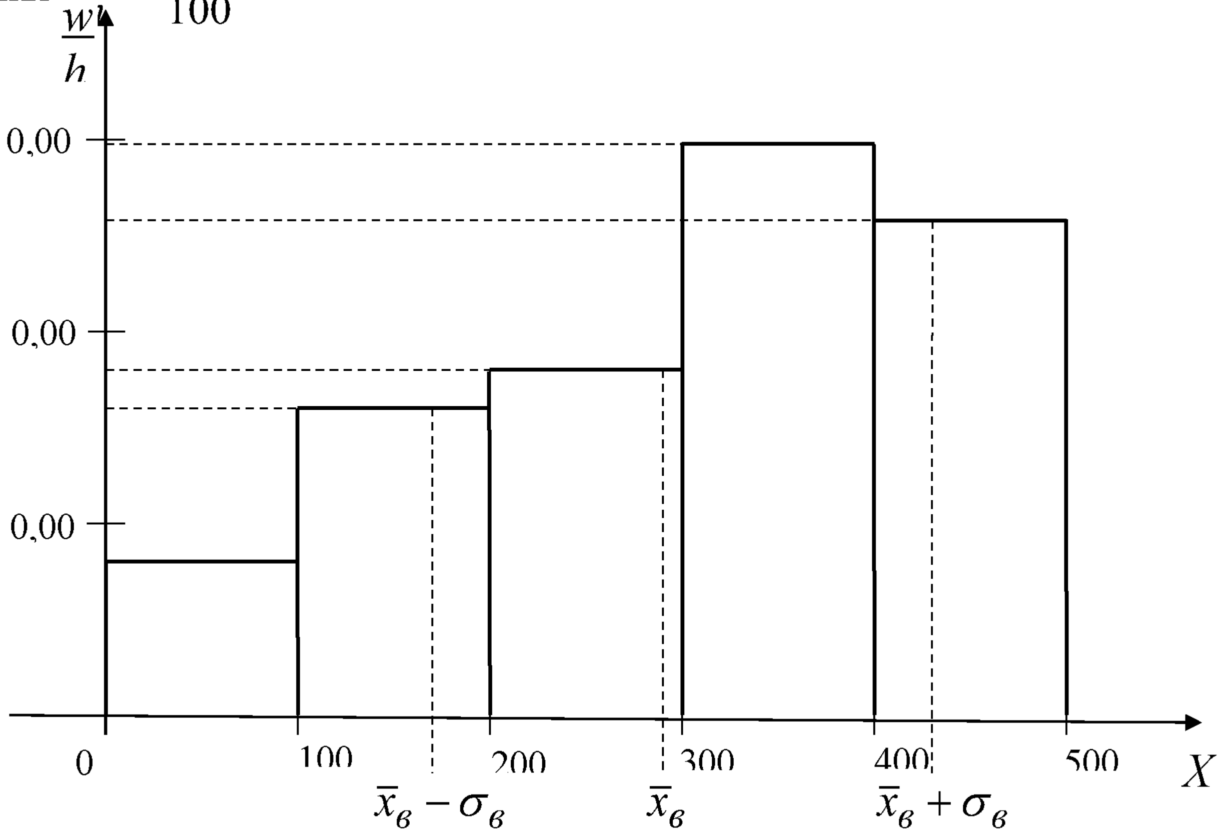


Рис. 2

б) Для нахождения характеристик выборки от интервального распределения признака X перейдем к дискретному, выбирая в качестве значений признака x_i середины частичных интервалов:

x_i	50	150	250	350	450
n_i	10	18	20	32	28

Найдем основные характеристики этого распределения. Средняя выборочная (средняя величина вклада в тыс. рублей):

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{1}{108}(50\cdot 10 + 150\cdot 18 + 250\cdot 20 + 350\cdot 32 + 450\cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(500 + 2700 + 5000 + 11200 + 12600) = \frac{1}{108}\cdot 32000 \approx 296{,}296.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{m}\sum\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 \cdot n_i = \frac{1}{108}\cdot\left[(50 - 296{,}296)^2\cdot 10 + (150 - 296{,}296)^2\cdot 18 +\right.$$

$$\left. + (250 - 296{,}296)^2\cdot 20 + (350 - 296{,}296)^2\cdot 32 + (450 - 296{,}296)^2\cdot 28\right] =$$

$$= \frac{1}{108}(606617{,}196 + 385245{,}353 + 42866{,}392 + 92291{,}828 +$$

$$+ 661497{,}749) = \frac{1}{108}\cdot 1788518{,}518 = 16560{,}357.$$

Второй способ вычисления дисперсии.

Найдем среднюю квадратов значений признака:

$$\overline{x^2_в} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 n_i = \frac{1}{108}\left(50^2\cdot 10 + 150^2\cdot 18 + 250^2\cdot 20 + 350^2\right) =$$

$$= \frac{1}{108}(25000 + 405000 + 1250000 + 3920000 + 5670000) =$$

$$= \frac{1}{108}\cdot 11270000 \approx 104351{,}852.$$

$$D_в = \overline{x^2_в} - (\overline{x_в})^2 = 104351{,}852 - (296{,}296)^2 =$$

$$= 104351{,}852 - 87791{,}495 = 16560{,}357.$$

Этот результат совпадает с результатом первого способа (иногда приближенно из-за ошибок округлений).

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{16560{,}357} \approx 128{,}687,$$

то есть, в среднем, разброс вкладов составляет ± 128,687 тыс. рублей от среднего значения 296,296 тыс. рублей (см. рис. 3, пунктирные вертикальные линии).

в) Оценим неизвестные генеральные характеристики:

генеральная средняя: $\overline{x} \approx \overline{x_в} = 296{,}296$ тыс. рублей;

генеральная дисперсия:

$$D \approx \frac{n}{n-1} D_в = \frac{108}{108-1} \cdot 16560{,}357 \approx 16715{,}127;$$

генеральное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{16715{,}127} \approx 129{,}287 \text{ (тыс. рублей).}$$

г) Доверительный интервал для оценки генеральной средней a (среднего вклада) с надежностью γ находим по формуле

$$a \in (\overline{x_в} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_в} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}).$$

По условию задачи $n = 108$, $\overline{x_в} = 296{,}296$; $\sigma = 129{,}287$, $\gamma = 0{,}95$. Неизвестный параметр t находим из условия: $2\Phi(t) = \gamma$. Поскольку в данной задаче $\gamma = 0{,}95$, то есть $2\Phi(t) = 0{,}95$, то $\Phi(t) = 0{,}475$. Из таблицы (приложение 2) берем соответствующее значение t: $t = 1{,}96$.

Вычислим по этим данным доверительный интервал:

$$(296{,}296 - 1{,}96 \cdot \frac{129{,}287}{\sqrt{108}}; \quad 296{,}296 + 1{,}96 \cdot \frac{129{,}287}{\sqrt{108}}),$$

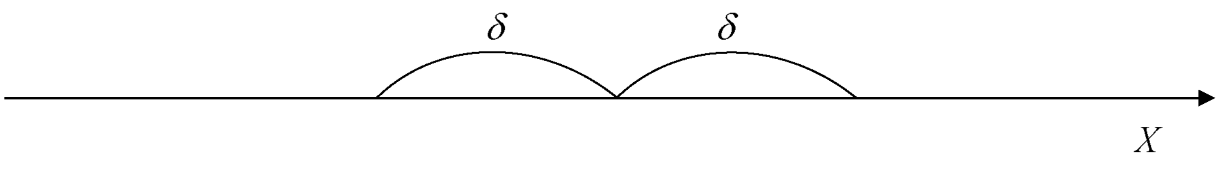
$$(296{,}296 - 24{,}384; \quad 296{,}296 + 24{,}384),$$

$$(271{,}912; \quad 320{,}680).$$

Таким образом, с вероятностью 95% неизвестная генеральная средняя (математическое ожидание) находится в этом интервале:

$$\overline{x} = a \in (271{,}912; \quad 320{,}680).$$

Замечание. Доверительный интервал можно изобразить графически.



$\bar{x}_в - \delta$ $\bar{x}_в$ $\bar{x}_в + \delta$

Рис. 3

Длина полуинтервала $\delta = t \cdot \sigma / \sqrt{n}$ = 24,384 характеризует точность оценки. величина $\boldsymbol{\delta}$ называется прельной ошибкой оценки.

ЗАДАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Тема 1. Числовая последовательность.

Основные вопросы

1. Понятие множества. Операции над множествами.
2. Числовая последовательность.
3. Монотонная последовательность.
4. Ограниченная последовательность.
5. Предел последовательности.
6. Единственность предела последовательности.

Типовые задачи.

1. Установить, какая из двух записей верна:

а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

2. Даны множества: Z – целых чисел, M – отрицательных чисел, P – положительных чисел. Найти для этих множеств
$$(Z-M)\bigcap P;\ \ M\bigcap P; M\bigcup P; Z\bigcup M.$$
3. Вычислить пределы последовательностей:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n}{n+12};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-6n}{3n^3-5n+18}.$$

Тема 2. Функция

Основные вопросы

1. Область определения и область значения функции.
2. Элементарные и сложные функции.
3. Четные, нечетные функции.
4. Монотонные, периодические функции

Типовые задачи

1. Найти область определения функций:

1. $y=\sqrt{x^2-2x-8}$ 2. $y=3\sqrt{5-x}-\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$

3. $y=\lg\left(x^2-3\right)$ 4. $y=\arccos\dfrac{x-1}{5}$

2. Данные функции записать в виде цепи равенств, каждое звено которой содержит основную элементарную функцию (степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрическую):

1. $y=\left(3x-1\right)^7$ 2. $y=\lg\left(\sin 3x\right)$

3. $y=3^{2x-x^2}$ 4. $y=\sin\left(2^{-x^2}\right)$

3. Вычислить частное значение функций:

а) $f(x)=\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|$ при $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$.

б) $f(x)=2x\cdot\left(2x-2\right)\cdot\left(2x+6\right)\cdot\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)$ при $x = 0$, $x = 1$.

в) $f(x)=e^x+1$ при $x = 0$, $x = 1$, $x=\dfrac{a}{2}$, $x = -1$.

Тема 3. Предел функции

Основные вопросы

1. Понятие предела функции в точке и на бесконечности, их графические пояснения. Односторонние пределы.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и взаимная связь.
3. Первый и второй замечательные пределы. Число e.
4. Определение эквивалентных бесконечно-малых, привести примеры эквивалентных бесконечно-малых.
5. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их виды.

Типовые задачи

1. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^7-5x^5+2}{7x^6-3x-4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7\sqrt{x}+2}{5x^2+6x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3}{x+2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^3 x}-1}{x^2-x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{x\sin 5x}$; *е*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n+4}$;

2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{2x}{x-1}$, изобразить схематически ее график.

Тема 4. Производная функции

Основные вопросы

1. Понятие производной и дифференциала функции.
2. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
3. Производные второго порядка и выше.

Типовые задачи

1. Найти производные функций:

а) $y=5x-\dfrac{4}{x^3}$; *б*) $y=arctg(2x+3)$

в) $y=\dfrac{3-x^2}{5x+1}$; *г*) $y=x^2\ln(3x-1)$.

д) $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}.$ *е*) $y=(2x+1)^{10}$.

ж) $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}.$ *з*) $y=e^x x^a$.

Тема 5. Приложения производной

Основные вопросы

1. Признаки возрастания и убывания функции.
2. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.
3. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции.
4. Необходимые и достаточные условия перегиба графика функции.

Типовые задачи

1. Исследовать функции средствами дифференциального исчисления и построить их графики:

   а) $y = x^3 - 9x^2$; *б)* $y = xe^{-x}$; *в)* $y = x\ln x$..

2. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке $x = 1$. Результаты изобразить графически.
3. Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

$$а)\ \lim_{x\to 6}\frac{2x^2-15x+18}{x^2-4x-12};\qquad б)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{sin2x}.$$

Тема 6. Неопределенный интеграл

Основные вопросы

1. Первообразная. Неопределенный интеграл
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Формула интегрирования по частям.

Типовые задачи

1. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$$а)\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{7x-5}};\qquad б)\ \int\frac{2x^3+5\sqrt{x}-x}{x^2}dx;\qquad в)\ \int x\cos\left(4x^2\right)dx;$$

$$г)\ \int\frac{x+2,5}{x^2+5x-6}dx;\qquad д)\ \int x^2\sin x dx;\qquad е)\ \int\frac{1+\ln x}{x}dx.$$

Тема 7. Определенный интеграл

Основные вопросы

1. Определённый интеграл, его геометрический смысл.
2. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Нахождение площади плоской фигуры.
4. Основные методы интегрирования.

Типовые задачи

1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

   а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;
   б) $y = x^3$, $y = 8$;

2. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

   а) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;
   б) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Тема 8. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные вопросы

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ), их общее и частные решения.
2. Задача Коши для ДУ первого порядка.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
4. Линейные уравнения первого порядка. Метод Бернулли решения линейного уравнения первого порядка.

Типовые задачи

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' - 3\dfrac{y}{x} = x$ г) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$

б) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x$ д) $(2x+1)y' + y = x$

в) $y' + y\cos x = \sin 2x$ е) $xy' + y - e^x = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$:

а) $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x,$ $y_0 = 3,$ $x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},$ $y_0 = 5,$ $x_0 = 0.$

в) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2},$ $y_0 = 2,$ $x_0 = 0.$

г) $y' - 3\dfrac{y}{x} = x^3 e^x,$ $y_0 = e,$ $x_0 = 1.$

д) $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2},$ $y_0 = 1,$ $x_0 = 3.$

Тема 9. Дифференциальные уравнения второго порядка

Основные вопросы

1. Линейное однородное ДУ (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Характеристическое уравнение. Комплексные корни квадратного уравнения.
3. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения (ЛНДУ) второго порядка.
4. ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Типовые задачи

1. Найти частное решение линейного дифференциального

уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0,\quad y(0)=2,\quad y'(0) = 3.$

б) $y'' + 2y' + y = 0,\quad y(2)=1,\quad y'(2) = 0.$

в) $y'' + 4y' + 4y = 0,\quad y(0)=0,\quad y'(0) = 1.$

г) $y'' - 5y' - 6y = 0,\quad y(1)=7,\quad y'(1) = 0.$

д) $y'' + 6y' + 9y = 0,\quad y(0)=0,\quad y'(0) = 1.$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

а) $y'' + y' - 2y = 6x^2$

б) $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 1$

в) $y'' - y = 6x^3 - 24x$

Тема 10. Числовые ряды

Основные вопросы

1. Числовые ряды.
2. Определение числового ряда. Необходимый признак сходимости.
3. Признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. Знакопеременные ряды.
5. Абсолютная и условная сходимость.

Типовые задачи

1. Исследовать сходимость рядов, используя признаки сравнения.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n};$ *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^3+n}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

Тема 11. Степенные ряды

Основные вопросы

1. Степенные ряды, их области сходимости.
2. Ряды Тейлора и Маклорена.
3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Типовые задачи

Найти область сходимости степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{2n+1}$.

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Основные вопросы

1. Понятие функции двух переменных, её графическое изображение.
2. Линии уровня для функции двух переменных.
3. Понятие частных производных, их смысл.
4. Полный дифференциал для функции двух и трёх переменных.

Типовые задачи

1. Найти уравнение линий уровня и построить несколько линий уровня для функции:

   а) $z = x - 2y$; *б)* $z = xy$.
2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции:

   а) $z = x^4 e^y + \sqrt[3]{x^2 y}$; *б)* $z = x^3 e^{x^2+y^2}$.

Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных

Основные вопросы

1. Производная по направлению, её смысл.
2. Вектор-градиент, его смысл.
3. Понятие экстремума для функции двух переменных.
4. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Типовые задачи

1. Найти градиент функции $z = x^4 + y^3 + 2xy$ в точке $M(2;1)$.
2. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2)$ в точке $M(2;3)$ в направлении вектора $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$.
3. Найти экстремум функции во всей её области определения:

$а) \; z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$ $\qquad$ $б) \; z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right).$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy,$ в области $0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2.$
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4.$

4. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная учебная литература

1 Высшая математика : учебник / В.С. Шипачев. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 479 с. — (Высшее образование). — www.dx.doi.org/10.12737/5394. - Режим доступа: "http://znanium.com/go.php?id=990716"

2 Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., - 3-е изд. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2015. - 479 с.: 60x90 1/16. - (Золотой фонд российских учебников) (Переплёт) ISBN 978-5-238-00991-9. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=872573

3 Задачник по высшей математике : учеб. пособие / В.С. Шипачев. — 10-е изд., стереотип. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 304 с. — (Высшее образование). - Режим доступа: "http://znanium.com/go.php?id=986760"

Дополнительная учебная литература

4 Высшая математика. Практикум : учеб. пособие / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. — М. : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2018. — 160 с. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=935333

5 Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-методическое пособие / Джабраилов А.Ш. - Волгоград:Волгоградский государственный аграрный университет, 2017. - 72 с.: ISBN - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/1007877

5. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

- Научная электронная библиотека: www.elibrary.ru
- Образовательная платформа: www.urait.com
- Электронная-библиотечная система: www.znanium.com

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

№ п/п	Темы дисциплины	Перечень основной и дополнительной литературы
1	Математичекий анализ	1,3,4
2	Линейная алгебра	2,3
3	Теория вероятностей и математическая статистика	1,5

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Справочный материал по элементарной математике

1. Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

2. Формулы для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения.

3. Формула разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Действия со степенями:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0); \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}; \qquad x^{-p} = \frac{1}{x^p};$$

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}; \qquad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}; \qquad \left(x^p\right)^q = x^{pq};$$

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}.$$

5. Некоторые тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

6. Значения тригонометрических функций для некоторых углов α:

Угол α / Функция	0^0	30^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

7. Значения некоторых обратных тригонометрических функций:

$$\sin 0 = 0 \;\Rightarrow\; \arcsin 0 = 0;$$
$$\cos 0 = 1 \;\Rightarrow\; \arccos 1 = 0;$$
$$\operatorname{tg} 0 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg} 0 = 0 \qquad \text{и т.п.}$$

Самостоятельная (аудиторная и внеаудиторная) работа обучающихся является одним из основных видов познавательной деятельности, направленной на более глубокое и разностороннее изучение материалов учебной дисциплины и включает: обязательное ведение конспектов лекций; подготовку выступлений (сообщений, докладов) к практическим занятиям, семинарам; подготовку письменных контрольных работ (реферата, эссе, презентации).

Результаты выполнения самостоятельной работы представляются обучающимися во время аудиторных занятий, проверяются и оцениваются преподавателем в ходе аудиторных занятий, текущего (рубежного) контроля и промежуточной аттестации.

Для повышения эффективности самостоятельной работы обучающимся рекомендуется пользоваться расширенным поиском в национальном цифровом ресурсе РУКОНТ – межотраслевой электронной библиотеке. Доступ к ресурсу осуществляется на сайте: http://www.rucont.ru

Важной формой самостоятельной исследовательской работы, углубленного изучения той или иной проблемы учебного курса является подготовка и написание рефератов и эссе. Данная форма самостоятельной работы является важным элементом подготовки обучающихся к оформлению и написанию дипломной работы.

Виды самостоятельной работы:

- поиск и изучение нормативных правовых актов, в том числе с использованием электронных баз данных;
- поиск и изучение научной литературы, в том числе с использованием сети Интернет;
- решение задач из практикума;
- подготовка рефератов, докладов, эссе, презентаций;

Модель (особенности) самостоятельной работы обучающихся по отдельным разделам и темам курса:

- составление проектов профессиональных документов;
- обобщение материалов профессиональной практики по определенным вопросам;
- подготовка к проведению ролевой игры;
- подготовка для обсуждения дискуссионных вопросов;
- составление схем, сравнительных таблиц;
- решение практических ситуаций;
- подготовка к практическим занятиям.

8. Методические рекомендации для преподавателя. Образовательные технологии

Перед началом изучения дисциплины (на первом занятии) преподаватель обязан сообщить обучающимся порядок освоения тем (разделов) дисциплины, сроки и формы отчетностей, процедуры оценки системы учета уровня сформированности компетенций. Преподавание ведется методом комплексного и системно-проблемного изучения проблемных явлений и процессов, а также анализа их последствий применительно к современной профессиональной практике. Изложение материала должно строиться как с использованием теоретической подачи материала в виде лекций, так и в виде проведения семинаров (практических занятий). В ходе лекционных занятий рекомендуется использовать презентационные материалы (слайды).

На лекциях излагаются основные актуальные проблемы, раскрываются наиболее сложные вопросы дисциплины, активизируется мыслительная деятельность путем постановки проблемных вопросов и вовлечения, обучаемых в их решение, развиваются их творческие способности.

В ходе семинарских и практических занятий для реализации компетентностного подхода рекомендуется использование активных и интерактивных форм обучения (решения задач, деловых и ролевых игр, разбора конкретных ситуаций) в сочетании с внеаудиторной самостоятельной работой (подготовка устных выступлений (докладов, сообщений), что позволит углубить понимание наиболее сложных теоретических и прикладных проблем, рассмотренных в ходе лекций, и сформировать навыки и умения использования необходимых нормативных правовых актов для регулирования профессиональных ситуаций.

Преимущественной формой текущего контроля успеваемости обучающихся является тестирование, которое должно быть обязательным и которым должно быть завершено изучение каждого раздела учебной программы дисциплины.

При подготовке обучающихся к промежуточной аттестации необходимо провести консультацию по курсу и акцентировать внимание обучающихся на использовании рекомендованной основной и дополнительной литературы, содержания конспектов лекций, а также необходимости составления тезисов ответов на вопросы, выносимые на зачет.

9. Обеспечение доступности освоения программы обучающимися с ограниченными возможностями здоровья.

Условия организации и содержание обучения и контроля знаний обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (далее – ОВЗ) определяются программой дисциплины, адаптированной при необходимости для обучения указанных обучающихся.

Организация обучения, текущей и промежуточной аттестации обучающихся с ОВЗ осуществляется с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся. Исходя из психофизического развития и состояния здоровья обучающихся с ОВЗ, организуются занятия совместно с другими обучающимися в общих группах, используя социально-активные и рефлексивные методы обучения создания комфортного психологического климата в учебной группе или, при соответствующем заявлении такого обучающегося, по индивидуальной программе, которая является модифицированным вариантом основной рабочей программы дисциплины. При этом содержание программы дисциплины не изменяется. Изменяются, как правило, формы обучения и контроля знаний, образовательные технологии и учебно-методические материалы.

Обучение лиц с ОВЗ также может осуществляться индивидуально и/или с применением элементов электронного обучения. Электронное обучение обеспечивает возможность коммуникаций с преподавателем, а также с другими обучаемыми посредством вебинаров (например, с использованием программы Skype), что способствует сплочению группы, направляет учебную группу на совместную работу, обсуждение, принятие группового решения. В образовательном процессе для повышения уровня восприятия и переработки учебной информации обучающимися с ОВЗ применяются мультимедийные и специализированные технические средства приема-передачи учебной информации в доступных формах для обучающихся с различными нарушениями, обеспечивается выпуск альтернативных форматов печатных материалов (крупный шрифт), электронных образовательных ресурсов в формах, адаптированных к ограничениям здоровья обучающихся, наличие необходимого материально-технического оснащения. Подбор и разработка учебных материалов производится преподавателем с учетом того, чтобы обучающиеся с нарушениями слуха получали информацию визуально, с нарушениями зрения – аудиально (например, с использованием программ-синтезаторов речи).

Для осуществления процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся лиц с ОВЗ фонд оценочных средств по дисциплине, позволяющий оценить достижение ими результатов обучения и уровень сформированности компетенций, предусмотренных учебным планом и рабочей программой дисциплины, адаптируется для лиц с ограниченными возможностями здоровья с учетом индивидуальных психофизиологических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п.). При необходимости обучающимся предоставляется дополнительное время для подготовки ответа при прохождении всех видов аттестации.

Особые условия предоставляются обучающимся с ограниченными возможностями здоровья на основании заявления, содержащего сведения о необходимости создания соответствующих специальных условий.

10. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

1.1 Перечень компетенций и индикаторов с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Перечень формируемых компетенций	Этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы	
	дисциплины / практики	семестр
УК-1 УК1.3	Математика	123
	Основы научных исследований	2
	Экономика труда	6
	Маркетинг	3
	Ознакомительная практика	4
	Преддипломная практика	10
	Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы	10
ОПК-1 ОПК-1.2	Математика	123
	Статистика	3
	Экономический анализ	34
	Региональная экономика	4
	Экономико-математические модели и методы	4
	Ознакомительная практика	4
	Преддипломная практика	10
	Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы	10

1.2 Этапы формирования компетенций и оценочные материалы для проверки хода освоения дисциплины и достижения планируемых результатов обучения.

Результаты освоения ООП: код и формулировка компетенции (в соответствии с учебным планом) или ее части	Код и формулировка индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине	Оценочные материалы	Темы дисциплины, обеспечивающи этапы формирования компетенции

ОПК-1 Способен использовать знания и методы экономической науки, применять статистико-математический инструментарий, строить экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты	ОПК-1.2 Выбирает и применяет статистико-математический инструментарий, строит экономико-математические модели необходимые для решения профессиональных задач	**Знает:** -статистико-математический инструментарий	О, СЗ, ВЭ, Кр	Темы 1-10
		Умеет: -применять статистико-математический инструментарий.	О, СЗ, ВЭ, Кр	Темы 1-10
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.3 Критически анализирует и обобщает информацию для решения поставленных задач, применяя теоретические и эмпирические, количественные и качественные методы, системный подход	**Знает:** -методы системного подхода..	О, СЗ, ВЭ, Кр, ЛР	Темы 11-19
		Умеет: -применять методы системного подхода..	О, СЗ, ВЭ, Кр	Темы 11-19

О –опрос, СЗ-ситуационные задачи, ВЭ – вопросы к экзамену, Кр –контрольная работа ЛР – лабораторная работа

Раздел 2. Оценочные материалы

Оценочные материалы: текущий контроль

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплины на практических и проводится в виде опроса, решения ситуационных задач на практических занятиях. А также на лабораторных занятиях. Все задания представлены в методических указаниях (Методические указания и задания к занятиям семинарского типа, контрольной и самостоятельной работе по дисциплине: «МАТЕМАТИКА»)

Вид ОМ	Описание оценочного материала
О (опрос)	**Раздел 1 Математический анализ** **Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости.** Вопросы : 1. Виды уравнения прямой. 2. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности. 3. Приведение уравнений кривых 2-го порядка к каноническому виду. 4. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. 5. Векторы. Определение, длина, О-вектор, единичные векторы. 6. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства, физический смысл. 7. Векторное произведение. Вычисление площади параллелограмма, треугольника. **Тема2 Функция и предел функции.** Вопросы : 8. Понятие функции действительного аргумента. Область определения, график функции. 9. Предел функции в точке. Геометрическое толкование. 10. Бесконечно малые величины и бесконечно большие величины и их свойства. 11. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. 12. Теоремы о пределах. 13. Первый и второй замечательный предел. 14. Непрерывность функции в точке (2 определения). Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке. 15. Теоремы о непрерывных функциях. **Тема3 Дифференциальное исчисление и его приложения.** Вопросы : 16. Понятие производной. Механический геометрический смысл производной. 17. Основные правила дифференцирования; производная суммы, произведения, частного функций. 18. Производная сложной и обратной функции. 19. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. 20. Производные степенной, показательной и показательно-степенной функций. 21. Производные высших порядков. 22. Схема исследования функций и построение их графиков. 23. .Частные производные. Их геометрический смысл для функций 2-х переменных. **Тема4 Интегральное исчисление и его приложения.** Вопросы : 24. Первообразная функция и ее свойства. 25. Понятие неопределенного интеграла и его свойства. Геометрический смысл. 26. Простейшие правила интегрирования. 27. Основные формулы интегрирования. 28. Метод замены переменной. 29. Метод интегрирования по частям. 30. Интегрирование рациональных функций 31. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций. Универсальная подстановка. Частные случаи. 32. Интегрирование простейших иррациональностей. 33. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. 34. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Его геометрический смысл. Теорема существования. 35. Свойства определенного интеграла. 36. Определенный интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной по переменному верхнему пределу.

	37. Связь неопределенного и определенного интегралов. Формула Ньютона-Лейбница. 38. Замена переменной в определенном интеграле. 39. Интегрирование по частям в определенном интеграле. 40. Несобственные интегралы 1-го, 2-го рода. 41. Вычисление площадей плоских фигур: 42. Вычисление объема тел по известным площадям поперечных сечений. 43. Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольных координатах. Дифференциал длины дуги. 44. Вычисление длины дуги в параметрической форме и в полярных координатах. **Тема5 Дифференциальные уравнения.** Вопросы : 45. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 46. Начальные и краевые условия. 47. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. 48. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. 49. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. 50. Структура общего решения. 51. Системы дифференциальных уравнений. **Тема6 Аналитическая геометрия в пространстве** Вопросы : 52. Уравнение прямой в пространстве 53. Уравнение плоскости в пространстве 54. Основные задачи **Тема7 Функции нескольких переменных.** Вопросы : 55. Частные производные первого порядка. 56. Дифференцируемость функций нескольких переменных. 57. Производная сложной функции 58. Экстремумы функции двух переменных **Раздел 2 Линейная алгебра** **Тема8 Матрицы.** Вопросы : 59. Понятие матрицы. Классификация матриц. 60. Действия над матрицами. Обратная матрица 61. Определители 2-го, 3-го, …,n-го порядка, их свойства и вычисление. 62. Ранг матрицы. **Тема9 Система линейных алгебраических уравнений.** Вопросы : 63. Решение СЛАУ (формулы Крамера). 64. Решение СЛАУ методом обратной матрицы. 65. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. 66. Критерий совместности СЛАУ (теорема Кронекера-Капелли). 67. Решение произвольных систем m линейных уравнений с n неизвестными методом Гаусса. 68. Однородные СЛАУ и их решение. **Тема10. Задачи линейного программирования.** Вопросы : 69. Канонический вид задачи ЛП

70. Графический метод решения задачи ЛП

Тема 11 Транспортная задача линейного программирования

Вопросы :

71. Постановка транспортной задачи
72. Критерий оптимальности.
73. Метод потенциалов.
74. Перераспределение планов поставок.

Тема 12 Оптимизационные задачи.

Вопросы :

75. Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения Беллмана.
76. Задача об оптимальном распределении капитала между несколькими предприятиями.

Раздел 3 Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 13 Основные понятия теории вероятностей

Вопросы :

77. Что такое событие? Какие события, испытание вы знаете? Виды событий.
78. Полная группа событий.
79. Классическое определение вероятности.
80. Условная вероятность события.
81. Теоремы вероятностей.
82. Формула Байеса.

Тема 14 Повторные независимые испытания

Вопросы :

83. Формула Бернулли.
84. Наивероятнейшее число наступлений события А.

Тема 15 Дискретная случайная величина

Вопросы :

85. Дискретная случайная величина.
86. Функция распределения.
87. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его смысл
88. Закон распределения дискретной случайной величины
89. Дисперсия дискретной случайной величины и ее смысл.
90. Биномиальный закон распределения

Тема 16 Непрерывная случайная величина

Вопросы :

91. Непрерывные случайные величины.
92. Числовые характеристики непрерывной случайной величины
93. Кривая Гаусса. Правило трех сигм

Тема 17 Обработка выборочных данных

Вопросы :

94. Статистическое распределение выборки
95. Основные характеристики выборочного распределения.

Тема18 Проверка статистических гипотез

Вопросы :

96. Статистические гипотез.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">97. Критерий согласия Пирсона.

Тема 19 Теория корреляции
Вопросы :
98. Уравнение регрессии.
99. Метод наименьших квадратов.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Процедура: Устный опрос студентов проводится по вопросам , относящимся к теме семинарского занятия, составляет теоретическую часть занятия, позволяет преподавателю оценить степень усвоения студентами лекционного материала.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Критерии/шкала оценивания (пример):</td></tr>
<tr><td></td><td>Зачет</td><td>Содержание ответа полностью правильное. Экзаменуемый свободно оперирует всеми основными и дополнительными терминами и понятиями в рамках программы. Изложение материала грамотное, логичное.</td></tr>
<tr><td></td><td>Незачет</td><td>Содержание правильное в меньшей части ответа или полностью неправильное. Экзаменуемый показывает знания меньшей части основных терминов и понятий в рамках программы или их полное отсутствие. Информация излагается неграмотно, неупорядоченно.</td></tr>
<tr><td>Ситуационные задачи (СЗ)</td><td colspan="2">Раздел 1

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости.
1. Задача
Пусть $M_1(1;3)$ и $M_2(-1;2)$, $M_3(3;5)$ - вершины треугольника. Написать уравнение высоты M_2K. Выполнить чертеж.

2. Задача
Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{2;-3;6\}$.
3. Задача
Определить значение β, при котором векторы будут компланарны, если $\overline{a}=(1;3;-5)$, $\overline{b}=(-2;1;0)$, $\vec{c}=\{\beta;-3;1\}$.

Тема2 Функция и предел функции.
4. Задача
Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-4}$.
5. Задача
Вычислить наибольшее значение функции на отрезке, где $f(x)=x^3-3x+2,\ x\in[0;4]$..
Тема3 Дифференциальное исчисление и его приложения.
6. Задача
Найти y'' для $y=2\sin^2 3x$
7. Задача
Для данной функции $y=\begin{cases}2x-1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\le x\le 3,\\ 6, & x>3\end{cases}$
провести исследование на непрерывность. Построить график.
8. Задача
При каких значениях аргумента x касательная к графику функции</td></tr>
</table>

$y = x^3 - x - 3$ ПАРАЛЛЕЛЬНА ОСИ ОХ

Тема4 Интегральное исчисление и его приложения.

9. Задача

Найти первообразную. $\int x^6 \ln(8x)dx$. Сделать проверку.

10. Задача

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=-x^2-5x-6$; $y=x+2$.

Тема5 Дифференциальные уравнения.

11. Задача

Найти решение ДУ

1) $(1-x^2)y' = xy$, 2) $y'' = 4 + x$, 3) $y'' = xe^{3x}$

12. Задача

Используя принцип суперпозиции записать вид общего решения неоднородного ЛДУ 1) $y'' - y = x + \cos x$, 2) $y'' + y = 1 - e^x$

Тема6 Аналитическая геометрия в пространстве

13. Задача

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ в данной точке А(1, 2, 24).

14. Задача

ИЗВЕСТНЫ КООРДИНАТЫ ВЕРШИН ТРЕУГОЛЬНИКА $A_1(1;3;-1)$, $A_2(3;-3;0)$ И $A_3 = (0;1;-2)$ НАПИСАТЬ УРАВНЕНИЕ МЕДИАНЫ A_3M .

Тема7 Функции нескольких переменных.

15. Задача

Найти производную функции $z = xy + \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке $M(2;1)$ в направлении вектора $\bar{s} = \{1;0\}$, найти $grad\, z$ в точке M .

16. Задача2

ДЛЯ ДАННОЙ ФУНКЦИИ НАЙТИ ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ: $z = \sqrt{3xy} - \cos(4x^3 y)$

Раздел2 Линейная алгебра

Тема8 Матрицы.

17. Задача

Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

18. Задача

Выполнить действия: А·В+2·С, где

А= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; В= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; С= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

Тема9 Система линейных алгебраических уравнений.

19. Задача

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x-4y-4z=0; \\ x+5y+5z=-9; \\ -x-y-5z=-7; \end{cases}$$

20. Задача

Решить методом исключения Гаусса:

$$\begin{cases} 2x+2y-z+t=4; \\ 4x+3y-z+2t=6; \\ 8x+5y-3z+4t=12; \\ 3x+3y-2z+2t=6; \end{cases}$$

Тема10 Задачи линейного программирования.

21. Задача

Решить графически задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 4x_1-x_2\ge 0, \\ 2x_1+x_2\ge 6, \\ x_1+2x_2\le 16, \\ x_1\ge 4; \\ x_1-x_2\le 0. \\ x_2\ge 0. \end{cases} \qquad \boldsymbol{Z=4x_1+2x_2}\to \min .$$

22. Задача

Решить задачу линейного программирования; составить задачу, двойственную данной, и также найти ее решение:

$$\begin{cases} x_1-4x_2-4\le 0, \\ 3x_1-x_2\ge 0, \\ x_1+x_2-4\ge 0, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0; \end{cases} \qquad Z=x_1+x_2\to \max .$$

Тема 11 Транспортная задача линейного программирования

23. Задача

На трех станциях A_1, A_2, A_3 сосредоточен однородный груз соответственно в объемах *9,16,5 (т)*, который необходимо доставить четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно в объемах *11, 7, 8, 4 (т)*. Затраты на перевозку тонны груза из каждой станции до каждого потребителя заданы матрицей тарифов:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется спланировать перевозки так, чтобы обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов.

24. Задача

Решить задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективностей А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Тема 12 Оптимизационные задачи.

25. Задача

Инвестор выделяет средства в размере 5 тыс. ден. ед., которые должны быть распределены между тремя предприятиями. Требуется, используя принцип оптимальности Беллмана, построить план распределения инвестиций между предприятиями, обеспечивающий наибольшую общую прибыль, если каждое предприятие при инвестировании в него средств x тыс. ден. ед. приносит прибыль $p_i(x)$ тыс. ден. ед. (i=1, 2 и 3) по следующим данным:

Инвестирование средств (тыс. ден. ед.)	Прибыль (тыс. ден. ед.)		
x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
1	3,22	3,33	4,27
2	3,57	4,87	7,64
3	4,12	5,26	10,25
4	4	7,34	15,93
5	4,85	9,49	16,12

Раздел 3

Тема 13. Основные понятия теории вероятностей

26. Задача .

Наугад выбирается двузначное число от 10 до 50, включая оба крайних. Событие А - «выбранное число является точным квадратом», событие В - «выбранное число, кратно семи». Описать словами события А*В, А+В. Найти вероятности Р(АВ), Р(А+В).

27. Задача .

В двух урнах по 4 белых и по 6 черных шаров. Из обеих урн наудачу извлекается по шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

28. Задача

Студент подготовил 30 из 40 вопросов программы. С какой вероятностью он получит положительную оценку, если для этого он должен ответить хотя бы на два вопроса из трех предложенных случайным образом?

29. Задача .

Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. В группе число мужчин и женщин одинаково. Какова вероятность того, что наугад выбранное из этой группы лицо страдает дальтонизмом? По списку дальтоников наугад выбран человек. Какова вероятность, что это мужчина?

Тема 14. Повторные независимые испытания

30. Задача

Монета подброшена 120 раз. Найти вероятности следующих событий: а) гербов выпал ровно 60 раз; б) герб выпал не меньше 50 и не больше 70 раз.

31. Задача

По мишени сделано 5 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле 0,7. Каково наивероятнейшее число попаданий? Найти соответствующую вероятность.

Тема 15 Дискретная случайная величина

32. Задача

Три стрелка стреляют по очереди по одной мишени до первого попадания, но не более, чем по одному разу. Вероятности попадания каждым стрелком соответственно равны 0,6; 0,5; 0,4. Случайная величина X – количество сделанных выстрелов по мишени. Найти закон распределения, M(X), D(X).

Тема 16 Непрерывная случайная величина

33. Задача

Случайная величина X равномерно распределена в интервале (1,9). Записать дифференциальную функцию f(x) и интегральную функцию F(x). Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

34. Задача .

Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем M(X) = 10, D(X) = 4. Найти $P(8 < X < 12)$. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения

$(X – M(X)) < 3$.

Тема 17 Обработка выборочных данных

35. Задача

В результате выборочного наблюдения получено следующее распределение признака X.

X	До 10	100-200	200-300	300-400	400-500

	0				
ni	10	18	20	32	8

а) Изобразить данное распределение графически, построив гистограмму относительных частот.

б) Найти основные характеристики выборки: среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) С надежностью 0,95% указать доверительный интервал для генеральной средней, приняв гипотезу о нормальном распределении признака X.

Тема18 Проверка статистических гипотез

36. Задача

В результате выборочного обследования получены следующие данные о значении признака X на промежутке [2; 10]

3,24 3,00 3,24 8,35 5,92 5,98 3,41 4,44 3,87 9,46 9,30 7,66 6,21

7,98 8,26 6,13 8,27 4,97 3,39 5,09 2,28 6,53 8,66 5,72 4,99 4,26

2,13 5,25 3,56 6,04 5,95 2,91 6,46 5,31 4,01 5,86 6,83 3,99 7,45

6,78 2,92 2,96 5,07 2,87 3,97 5,43 6,85 7,33 8,74 5,55.

Пользуясь критерием Пирсона, проверить гипотезу о нормальном распределении с мат.ожиданием равным средней выборочной и

$\sigma = s$ значений признака в генеральной совокупности на уровне значимости 0,025.

Тема19 Теория корреляции

37.Задача

В результате наблюдения за двумя количественными признаками X и Y получены данные:

X	5	6	6	7	7	8	9
Y	6	6	7	8	9	9	10

Требуется:

а) Оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y;

б) Составить уравнение линейной регрессии Y по X;

в) Графически отразить наблюдаемые выборочные значения признаков и построить прямую линию регрессии.

г) Какие значения признака Y могут быть при X = 4 и X = 12.

Форма предъявления:

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td colspan="2">Задачи должны быть решены письменно. Решение ситуационных задач осуществляется с целью проверки уровня знаний, умений, навыков студентов, приобретаемых в процессе обучения.
Процедура:
Задачи решаются во время занятия или в период самостоятельной работы с использованием учебной и научной литературы.
Приступая к решению ситуационной задачи, необходимо подробно изучить учебную и специальную литературу.
Шкала оценивания /критерии:</td></tr>
<tr><td>«Отлично»</td><td>Ответы на вопросы задачи даны верные. Решение мотивированное, подробное, последовательное, грамотное, с теоретическим обоснованием.</td></tr>
<tr><td>«Хорошо»</td><td>Ответы на вопросы задачи даны, в целом верные. Объяснение хода ее решения подробное, но недостаточно логичное, с единичными ошибками в деталях, некоторыми затруднениями в теоретическом обосновании.</td></tr>
<tr><td>«Удовлетворитель но»</td><td>Ответы на вопросы задачи содержат небольшие ошибки. Объяснение хода ее решения недостаточно полное, непоследовательное, с ошибками, слабым теоретическим обоснованием, ответы на дополнительные вопросы недостаточно четкие, с ошибками в деталях.</td></tr>
<tr><td>«Неудовлетворите льно»</td><td>Ответ на вопрос задачи дан не правильный. Объяснение хода ее решения дано неполное, непоследовательное, с грубыми ошибками, без теоретического обоснования.</td></tr>
</table>

Контрольные работы

<table>
<tr><td rowspan="4">Кр</td><td colspan="2">Форма предъявления:
Комплект контрольных заданий (по вариантам) должен быть выполнен письменно. Цель - проверка уровня знаний, умений, навыков студентов, приобретаемых в процессе обучения.
Контрольная работа представлена в: Методических указаниях и заданиях к занятиям семинарского типа, контрольной и самостоятельной работе по дисциплине «Математика» для обучающихся специальности 38.05.01 Экономическая безопасность.
Процедура:
Контрольные работы выполняются в период самостоятельной работы с использованием учебной и научной литературы.
Приступая к выполнению контрольной работы необходимо подробно изучить учебную и специальную литературу
Шкала оценивания /критерии:</td></tr>
<tr><td>«Отлично»</td><td>Выставляется обучающемуся, если работа написана самостоятельно, ответы на вопросы задачи даны верные. Решение мотивированное, подробное, последовательное, грамотное, с теоретическим обоснованием.</td></tr>
<tr><td>«Хорошо»</td><td>Выставляется обучающемуся, если работа написана самостоятельно, ответы на вопросы задачи даны в целом верные. Объяснение хода решения подробное, но недостаточно логичное, с единичными ошибками в деталях, некоторыми затруднениями в теоретическом обосновании.</td></tr>
<tr><td>«Удовлетворительно»</td><td>Выставляется обучающемуся, если ответы на вопросы задачи содержат небольшие ошибки.</td></tr>
</table>

		Объяснение хода ее решения недостаточно полное, непоследовательное, с ошибками, слабым теоретическим обоснованием, ответы на дополнительные вопросы недостаточно четкие, с ошибками в деталях.
	«Неудовлетворительно»	Выставляется обучающемуся, если ответ на вопрос задачи дан неправильный. Объяснение хода ее решения дано неполное, непоследовательное, с грубыми ошибками, без теоретического обоснования.

Лабораторные работы

ЛР	**Форма предъявления:** Комплект лабораторных заданий (по вариантам) должен быть выполнен и написан отчет письменно. Цель - проверка уровня знаний, умений, навыков студентов, приобретаемых в процессе обучения. **Процедура:** Лабораторные работы выполняются в период занятий с использованием учебной и научной литературы. Приступая к выполнению лабораторной работы необходимо подробно изучить учебную и специальную литературу **Шкала оценивания /критерии:**	
	«Отлично»	Выставляется обучающемуся, если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий. Обучающийся свободно ориентируется в предложенных решениях. может их модифицировать при изменении условий задачи.
	«Хорошо»	Выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, составлен отчет в установленной форме, свободно ориентируется в предложенных решениях.
	«Удовлетворительно»	Выставляется обучающемуся, если работа выполнена правильно, составлен отчет в установленной форме, может объяснить предложенные решения.
	«Неудовлетворительно»	Выставляется обучающемуся, если работа не выполнена, не составлен отчет в установленной форме, не может объяснить предложенное решение.

Перечень лабораторных работ:

Лабораторное занятие 1

Аналитическая геометрия в пространстве.

Лабораторное занятие 2

Действия с матрицами, вычисление определителей матриц

Лабораторное занятие 3

Линейная алгебра. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Оценочные материалы: промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация обеспечивает оценивание промежуточных и окончательных результатов обучения по дисциплине в форме экзамена

Промежуточная аттестация в 1 и семестре осуществляется в форме экзамена.

<table>
<tr><th rowspan="2">Вид ОМ</th><th colspan="2">Описание оценочного материала</th></tr>
<tr><th>Тема</th><th>Перечень вопросов</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Вопросы к экзамену (ВЭ)</td><td colspan="2">Раздел 3</td></tr>
<tr><td>Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости.</td><td>1. Виды уравнения прямой.
2. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности.
3. Приведение уравнений кривых 2-го порядка к каноническому виду.
4. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Векторы. Определение, длина, О-вектор, единичные векторы.
6. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства, физический смысл.
7. Векторное произведение. Вычисление площади параллелограмма, треугольника.</td></tr>
<tr><td>Тема 2 Функция и предел функции.</td><td>8. Понятие функции действительного аргумента. Область определения, график функции.
9. Предел функции в точке. Геометрическое толкование.
10. Бесконечно малые величины и бесконечно большие величины и их свойства.
11. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.
12.Теоремы о пределах.
13. Первый и второй замечательный предел.
14. Непрерывность функции в точке (2 определения). Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.
15. Теоремы о непрерывных функциях.</td></tr>
<tr><td>Тема 3 Дифференциальное исчисление и его приложения.</td><td>16..Понятие производной. Механический геометрический смысл производной.
17.Основные правила дифференцирования; производная суммы, произведения, частного функций.
18.Производная сложной и обратной функции.
19.Производные степенной, показательной и показательно-степенной функций.
20.Производные высших порядков.
21.Схема исследования функций и построение их графиков.</td></tr>
<tr><td>Тема 4 Интегральное исчисление и его приложения.</td><td>22. Первообразная функция и ее свойства.
23. Понятие неопределенного интеграла и его свойства. Геометрический смысл.
24. Простейшие правила интегрирования.
25. Основные формулы интегрирования.
26. Метод замены переменной.
27. Метод интегрирования по частям.
28. Интегрирование рациональных функций</td></tr>
</table>

	Тема5 Дифференциальные уравнения. Тема6 Аналитическая геометрия в пространстве Тема7 Функции нескольких переменных	29 Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций. Универсальная подстановка. Частные случаи. 30. Интегрирование простейших иррациональностей. 31. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. 32. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Его геометрический смысл. Теорема существования. 33. Свойства определенного интеграла. 34. Определенный интеграл с переменным верхним пределом, теорема о его производной по переменному верхнему пределу. 35. Связь неопределенного и определенного интегралов. Формула Ньютона-Лейбница. 36. Замена переменной в определенном интеграле. 37. Интегрирование по частям в определенном интеграле. 38. Несобственные интегралы 1-го, 2-го рода. 39. Вычисление площадей плоских фигур: 40. Вычисление объема тел по известным площадям поперечных сечений. 41. Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольных координатах. Дифференциал длины дуги. 42. Вычисление длины дуги в параметрической форме и в полярных координатах. 43.Обыкновенные дифференциальные уравнения. 44.Начальные и краевые условия. 45.Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. 46.Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. 47.Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. 48.Структура общего решения. 49.Системы дифференциальных уравнений. 50.Уравнение прямой в пространстве 51.Уравнение плоскости в пространстве 52.Основные задачи 54.Частные производные первого порядка. 55.Дифференцируемость функций нескольких переменных. 56.Производная сложной функции 57.Экстремумы функции двух переменных

Форма предъявления: Экзамен проводится в устно-письменной форме по билетам. Билет содержит в себе два теоретических вопроса и задачу, что позволяет оценить сформированность у обучающихся знаний, умений и навыков.

Процедура: В начале обучения по дисциплине обучающиеся знакомятся с программой дисциплины и перечнем вопросов к экзамену. На подготовку к экзамену обучающемуся предоставляется 3 дня, перед экзаменом проводится консультация - 1 час. В период консультации преподаватель дает пояснения по вопросам, вызывающим затруднения у обучающихся.

Экзамен проводится в период сессии согласно графика учебного процесса на текущий учебный год. Экзамен проводится по экзаменационным билетам в аудитории института согласно расписанию экзаменов. На подготовку к ответу на экзамене обучающемуся предоставляется 30 минут. Во время экзамена студенты могут пользоваться рабочей программой дисциплины. Дополнительные вопросы возможны только по темам экзаменационного билета.

Критерии/шкала оценивания (пример):

«Отлично»	Обучающийся демонстрирует знания всесторонние и глубокие, в рамках материала основной и дополнительной литературы, свободно и самостоятельно демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача имеет правильное решение, грамотное

	теоретическое обоснование.
«Хорошо »	Обучающийся демонстрирует знания уверенные, в рамках материала основной литературы, свободно и самостоятельно демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача решена верно.
«Удовлетворительно»	Обучающийся демонстрирует достаточные знания (освоена большая часть программы), в рамках лекционного материала , демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача решена верно.
Неудовлетворительно»	Обучающийся демонстрирует знания поверхностные, бессистемные, не показывает необходимых умений, решение задачи не верное.

Промежуточная аттестация во 2 и семестре осуществляется в форме экзамена.

Вид ОМ	Описание оценочного материала	
	Тема	Перечень вопросов
Вопросы к экзамену (ВЭ)	**Раздел 3**	
	Тема 8. Матрицы.	58. Понятие матрицы. Классификация матриц. 59. Действия над матрицами. Обратная матрица 60. Определители 2-го, 3-го, …,n-го порядка, их свойства и вычисление. 61 .Ранг матрицы.
	Тема9 Система линейных алгебраических уравнений.	62 .Решение СЛАУ (формулы Крамера). 63. Решение СЛАУ методом обратной матрицы. 64. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. 65. Критерий совместности СЛАУ (теорема Кронекера-Капелли). 66. Решение произвольных систем m линейных уравнений с n неизвестными методом Гаусса. 67. Однородные СЛАУ и их решение.
	Тема10 Задачи линейного программирования.	68.Канонический вид задачи ЛП 69.Графический метод решения задачи ЛП
	Тема11 Транспортная задача линейного программирования	70. Постановка транспортной задачи 71 .Критерий оптимальности. 72. Метод потенциалов. 73. Перераспределение планов поставок.
	Тема12 Оптимизационные задачи.	74. Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения Беллмана. 75. Задача об оптимальном распределении капитала между несколькими предприятиями.
Форма предъявления: Экзамен проводится в устно-письменной форме по билетам. Билет содержит в себе два теоретических вопроса и задачу, что позволяет оценить сформированность у обучающихся знаний , умений и навыков.		
Процедура: В начале обучения по дисциплине обучающиеся знакомятся с программой дисциплины и перечнем вопросов к экзамену. На подготовку к экзамену обучающемуся предоставляется 3 дня, перед экзаменом проводится консультация - 1 час. В период консультации преподаватель дает пояснения по вопросам, вызывающим затруднения у обучающихся. Экзамен проводится в период сессии согласно графика учебного процесса на текущий учебный год. Экзамен проводится по экзаменационным билетам в аудитории института согласно расписанию экзаменов. На подготовку к ответу на экзамене обучающемуся предоставляется 30 минут. Во время		

экзамена студенты могут пользоваться рабочей программой дисциплины. Дополнительные вопросы возможны только по темам экзаменационного билета.

Критерии/шкала оценивания (пример):	
«Отлично»	Обучающийся демонстрирует знания всесторонние и глубокие, в рамках материала основной и дополнительной литературы, свободно и самостоятельно демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача имеет правильное решение, грамотное теоретическое обоснование.
«Хорошо »	Обучающийся демонстрирует знания уверенные, в рамках материала основной литературы, свободно и самостоятельно демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача решена верно.
«Удовлетворительно»	Обучающийся демонстрирует достаточные знания (освоена большая часть программы), в рамках лекционного материала , демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача решена верно.
Неудовлетворительно»	Обучающийся демонстрирует знания поверхностные, бессистемные, не показывает необходимых умений, решение задачи не верное.

Промежуточная аттестация в 3 семестре осуществляется в форме экзамена.

Вид ОМ	**Описание оценочного материала**	
	Тема	**Перечень вопросов**
Вопросы к экзамену (ВЭ)	**Раздел 3**	
	Тема 13.Основные понятия теории вероятностей	1 .Испытание, событие. 2. Достоверное событие, невозможное событие, случайное событие. 3. Совместные и несовместные события. 4. Противоположное событие. Вероятность противоположного события. 5. Полная группа событий. Свойство вероятностей событий, образующих полную группу. 6. Классическое определение вероятности. 7. Относительная частота наступления события. 8. Статистическая вероятность. 9. Зависимые и независимые события. 10. Условная вероятность события. 11. Теорема сложения вероятностей. 12. Теорема умножения вероятностей. 13. Формула полной вероятности. 14. Формула Байеса.
	Тема 14. Повторные независимые испытания	15. Повторные независимые испытания. 16. Формула Бернулли. 17. Вероятность наступления события А не менее k1 и не более k2 раз в n испытаниях. 18. Вероятность наступления события А хотя бы один раз в n испытаниях. 19. Вероятность не наступления события А во всех n испытаниях. 20. Наивероятнейшее число наступлений события А..

	Тема 15. Дискретная случайная величина	21.Дискретная случайная величина. 22.Закон распределения дискретной случайной величины. 23.Функция распределения. 24.Математическое ожидание дискретной случайной величины и его смысл. 25.Свойства математического ожидания. 26.Дисперсия дискретной случайной величины и ее смысл. 27.Свойства дисперсии. 28.Среднее квадратическое отклонение, его смысл, свойства. 29.Биномиальный закон распределения. 30.Математическое ожидание, дисперсия случайной
	Тема 16 Непрерывная случайная величина	31.Непрерывная случайная величина. Функция плотности и ее свойства. 32.Вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный интервал, выраженная через функцию плотности и функцию распределения. 33.Равномерное распределение: определение и функция плотности. 34.Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. 35.Нормальное распределение. Кривая Гаусса. Смысл параметров нормального распределения. 36.Интегральная функция Лапласа. 37.Вероятность попадания нормальной случайной величины на заданный интервал. 38.Правило 3-х сигм. Лемма Чебышева. Предел по вероятности. Теорема Чебышева. 39.Теорема Бернулли. 40.Интегральная теорема Муавра – Лапласа.
	Тема17 Обработка выборочных данных	41.Понятие генеральной совокупности и выборки. 42.Вариационный ряд. Статистический ряд частот (относительных частот). 43.Интервальный ряд распределения частот и относительных частот. 44.Гистограмма и ее связь с функцией плотности. 45.Эмпирическая функция распределения, ее связь с функцией распределения. 46.Оценка неизвестного параметра. Точечные оценки Хв и Dв
	Тема18 Проверка статистических гипотез	47.Общие правила проверки статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. 48.Критерий, уровень значимости, критическая область, область допустимых значений. Мощность критерия. 49.Критерий Пирсона для проверки гипотезы о виде распределения генеральной совокупности.
	Тема19 Теория корреляции	50.Коэффициент корреляции: определение, формула для вычисления, свойства (теорема) 51. Критерий для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних в случаях. 52.Уравнение регрессии. 53.Метод наименьших квадратов.
	Форма предъявления: Экзамен проводится в устно-письменной форме по билетам. Билет содержит в себе два теоретических вопроса и задачу, что позволяет оценить сформированность у обучающихся знаний , умений и навыков.	
	Процедура: В начале обучения по дисциплине обучающиеся знакомятся с программой	

	дисциплины и перечнем вопросов к экзамену. На подготовку к экзамену обучающемуся предоставляется 3 дня, перед экзаменом проводится консультация - 1 час. В период консультации преподаватель дает пояснения по вопросам, вызывающим затруднения у обучающихся. Экзамен проводится в период сессии согласно графика учебного процесса на текущий учебный год. Экзамен проводится по экзаменационным билетам в аудитории института согласно расписанию экзаменов. На подготовку к ответу на экзамене обучающемуся предоставляется 30 минут. Во время экзамена студенты могут пользоваться рабочей программой дисциплины. Дополнительные вопросы возможны только по темам экзаменационного билета.	
	Критерии/шкала оценивания:	
	«Отлично»	Обучающийся демонстрирует знания всесторонние и глубокие, в рамках материала основной и дополнительной литературы, свободно и самостоятельно демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача имеет правильное решение, грамотное теоретическое обоснование.
	«Хорошо »	Обучающийся демонстрирует знания уверенные, в рамках материала основной литературы, свободно и самостоятельно демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача решена верно.
	«Удовлетворительно»	Обучающийся демонстрирует достаточные знания (освоена большая часть программы), в рамках лекционного материала, демонстрирует умения, предусмотренные программой, задача решена верно.
	«Неудовлетворительно»	Обучающийся демонстрирует знания поверхностные, бессистемные, не показывает необходимых умений, решение задачи не верное.

11. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта, характеризующих этапы формирования компетенций

Текущий контроль

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется для проверки хода и качества усвоения учебного материала, стимулирования учебной деятельности обучающихся, совершенствования методики проведения занятий и проводится в ходе всех видов занятий в форме устного опроса на лекционных, семинарских и практических занятиях, выполнения устных и письменных практических заданий, в форме рубежного контроля и в форме выполнения контрольных работ.

**Критерии оценки устных ответов
в ходе проведения семинарских и практических занятий**

Шкала оценивания и отметка	Показатели оценивания
Отлично	Содержание материала раскрыто в полном объеме, предусмотренном учебной программой. Речь последовательна, хорошо продумана, изложена грамотным языком, с точным использованием терминологии. Обучающийся продемонстрировал умение иллюстрировать материал конкретными примерами, в том числе на основе раннее изученного материала, показано умение делать обобщение, выводы, сравнение. Изложение ответа осуществляется самостоятельно, без наводящих вопросов. Обучающийся принимает активное участие в изложении или в обсуждении изучаемого материала.
Хорошо	Обучающийся не полно раскрыл содержание материала, но показано общее понимание вопроса, достаточное для дальнейшего изучения программного материала. Изложение материала недостаточно последовательное, имеются затруднения и допущены ошибки в определении понятий и в использовании терминологии, однако обучающийся активно участвует в обсуждении изучаемого материала.
Удовлетворительно	Обучающийся затрудняется в изложении

	материала, делает обобщения, выводы, сравнения с помощью преподавателя, отвечает с помощью наводящих вопросов и подсказок, затрудняется в приведении примеров. С трудом вспоминает пройденный материал, не активен, в обсуждении материала участвует эпизодически.
Неудовлетворительно	Обучающийся не раскрыл основное содержание учебного материала или содержание материала излагалось с многочисленными подсказками, показавшими незнание или непонимание большей части учебного материала, допущены путаница и ошибки в определении понятий, продемонстрировано полное неумение приводить примеры при объяснении материала, в обсуждении материала пассивен.

Рубежный контроль является одним из видов текущего контроля. Рубежный контроль осуществляется с целью систематической проверки достижения обучающимися обязательных результатов обучения по дисциплине – минимума, который необходим для дальнейшего обучения, выполнения программных требований к уровню подготовки обучающихся. Рубежный контроль проводится по завершении изучения отдельных наиболее сложных и объемных тем, разделов учебной дисциплины. Рубежный контроль проводится на практических или семинарских занятиях. Лица, не сдавшие (не прошедшие) рубежный контроль, до промежуточной аттестации не допускаются. Результаты рубежного контроля заносятся в журнал учета учебных занятий. Рубежный контроль проводится в форме письменного или автоматизированного (компьютерного) тестирования. Обучающемуся предъявляется не менее 20 тестовых вопросов. Время для выполнения задания предоставляется из расчета: 1 минута на один тестовый вопрос.

Критерии оценки результатов тестирования

Шкала оценивания	**Критерии оценивания**
Отлично	Даны ответы не менее, чем на 90% тестовых заданий
Хорошо	Даны ответы не менее, чем на 75% тестовых заданий
Удовлетворительно	Даны ответы не менее, чем на 60% тестовых заданий
Неудовлетворительно	Даны ответы менее, чем на 60% тестовых заданий

Контрольная работа является видом текущего контроля, в отдельных случаях (если есть соответствующее указание в учебном плане) контрольная работа является формой промежуточной аттестации. Контрольные работы выполняются обучающимися в виде письменных ответов на вопросы, решения задач, выполнения контрольных (в том числе тестовых) заданий или практической проверки выполнения практических действий по составлению (корректировке) юридических документов. Выполнение контрольных работ может быть организовано в электронной форме. Содержание заданий на контрольную работу и порядок ее выполнения устанавливаются кафедрой.

Критерии оценки результатов выполнения контрольной работы, проведенной в форме решения практических задач

Оценка	**Критерии оценивания**
Отлично	Решение задачи (выполнение задания) осуществлено верно, обучающимся продемонстрировано умение пользоваться теоретическими знаниями, приведены все необходимые ссылки на нормативно-правовые акты. Выводы достоверны и аргументированы с привлечением источников нормативно-правовой информации. Формулировки выводов четкие, понятные и обоснованные. При неоднозначности возможного решения (описания ситуации) приведены возможные варианты с указанием последствий.
Хорошо	Задача (выполнение задания) решена верно, обучающимся продемонстрировано умение пользоваться теоретическими знаниями для решения практической задачи. Однако приведены не все необходимые ссылки на нормативно-правовые акты, формулировки выводов недостаточно четкие и понятные. Аргументация выводов свидетельствует об их недостаточной достоверности и обоснованности.
Удовлетворительно	Задача в целом решена, однако отсутствуют ссылки на нормативно-правовые акты. Решение задачи осуществлено шаблонно, без должного проявления профессиональной компетентности. Отсутствует логика, точность

	и грамотность изложения решения задачи (выполнения задания). Вывод недостаточно обоснован, не содержит необходимой аргументации, поверхностный или не следует из решения задачи.
Неудовлетворительно	Задача решена неверно или решение задачи отсутствует.

При оценивании результатов письменных контрольных работ обязательно учитываются грамотность изложения, чистота и правильность оформления работ. Работа, правильно передающая содержание материала, но изложенная с грамматическими ошибками или ошибками в графическом оформлении, не может быть оценена выше, чем - удовлетворительно. За работу, выполненную с грубыми грамматическими ошибками, нелитературным языком, неграмотно или небрежно графически оформленную, выставляется оценка - неудовлетворительно.

Критерии оценки результатов выполнения контрольной работы, проведенной в форме тестирования:

Шкала оценивания	**Критерии оценивания**
Отлично	Даны ответы не менее, чем на 90% тестовых заданий
Хорошо	Даны ответы не менее, чем на 75% тестовых заданий
Удовлетворительно	Даны ответы не менее, чем на 60% тестовых заданий
Неудовлетворительно	Даны ответы менее, чем на 60% тестовых заданий

При проведении контрольной работы в смешенной форме (теоретическая часть – в форме тестирования, а практическая часть – в форме выполнения практического задания) каждая часть работы оценивается отдельно по пятибалльной шкале в соответствии с вышеуказанными критериями. Оценка за контрольную работу в целом выставляется по сумме балов за теоретическую и практическую часть в соответствии со следующей шкалой оценивания:

Оценка	Сумма баллов за теоретическую и практическую часть контрольной работы
Отлично	**9-10**
Хорошо	**7-8**
Удовлетворительно	**5-6**
Неудовлетворительно	**0-4**

Заведующий кафедрой
естественнонаучных дисциплин А.П. Соколов

Разработчик
Доцент кафедры
естественнонаучных дисциплин И.А. Голдобин

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры
протокол №5 от «04» июля 2023 г.

Лист дополнений и изменений, внесенных в рабочую программу дисциплины

Номер изменений	Номера страниц				Всего страниц	Дата	Основание* для изменений
	изме-ненных	заме-ненных	анну-лирован-ных	новых			

*Основанием для внесения изменения является решение кафедры
(протокол № ___ от «___» _________ 20___ г.).